線形代数と線形性の周辺

酒匂貴市

平成 18 年 12 月 21 日

目 次

1　基本変形と正則性

1.1　正則の定義

定義 1.1 行列 A に対し、適当な行列 X が存在して

$$AX = XA = E$$

となるとき、A は**正則**であるといい、X を**逆行列**と呼んで $\mathbf{A^{-1}}$ と表す。

定理 1.1 正則行列の積は正則

(proof)
A, B が正則なら A^{-1}, B^{-1} が存在し、AB は逆行列 $B^{-1}A^{-1}$ を以て正則である。 証明終

補題 1.2 正方行列 A を $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ と対称区分けすると、A_{11}, A_{22} が正則なら、
逆行列 $\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$ を以て正則である。

(proof)
計算あるのみ。 証明終

1.2　基本変形

基本変形とは、次の三つの操作を言う。

1. 行 (列) の交換
2. 行 (列) の c($\neq 0$) 倍
3. ある行 (列) の c 倍を他の行 (列) に足す

基本変形は、次に挙げる行列との積を取ることによって実現できる。

$$Ex(i,j) = \begin{array}{r@{}c} & \begin{matrix} & & (i\text{ 列}) & & (j\text{ 列}) & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (j\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$
Scl(c;i) = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} & & (i\,\text{列}) & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ (i\,\text{行}) \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
 & \ddots & & & \\
 & & c & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
SA(c;i,j) = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & (i\,\text{列}) & & (j\,\text{列}) & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ (i\,\text{行}) \\ \\ (j\,\text{行}) \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & \vdots & \ddots & & & \\
 & & c & \cdots & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

より具体的には、

- Ex(i,j) を左からかけると、i 行と j 行の交換。
  Ex(i,j) を右からかけると、i 列と j 列の交換。
- Scl(c;i) を左からかけると、i 行の c($\neq 0$) 倍。
  Scl(c;i) を右からかけると、i 列の c($\neq 0$) 倍。
- SA(c;i,j) を左からかけると、i 行の c 倍を j 行に足す。
  SA(c;j,i) を右からかけると、i 列の c 倍を j 列に足す。

ということである。これらの行列については、逆行列

$$Ex(i,j)^{-1} = Ex(i,j), \quad Scl(c;i)^{-1} = Scl(\frac{1}{c};i), \quad SA(c;i,j)^{-1} = SA(-c;i,j)$$

を以て、すべて正則である。これから次のことが言える。

定理 1.3 行列 A を、行基本変形によって B にしたということは、正則行列 P を用いて

$$B = PA$$

と表せることである。同様に列基本変形なら、正則行列 Q を用いて

$$B = AQ$$

と表せ、いずれも用いたなら

$$B = PAQ$$

と表せる。

1.3　掃き出し法

行列のある成分を決め (要 [かなめ] という)、その列 (行) の他の成分を行 (列) 基本変形によって 0 にすることを、**掃き出す**という。これは明らかに、要が非 0 であれば可能である。

定理 1.4 正方行列 A に対し、$AX = E$ もしくは $XA = E$ となる X が存在すれば、それだけで実は A は正則である。

(proof)
AX=E の場合について考察する。
(i)1 次正方行列に関しては明らか。
(ii)(k-1) 次行列について成り立つとして、A が k 次正方行列のとき。

A=0 ならどんな X に対しても $AX = E$ となりえないので考えるまでも無い。

$A \neq 0$ なら必ずひとつは非 0 の要素があるので、これを基本変形によって (1,1) に運び、第 1 列と第 1 行を掃き出し、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A' \end{pmatrix}$$

の形にする。
この時、定理 1.3 より、正則行列 P,Q を用いて、$B = PAQ$ である。
B と同様に区分けして、

$$Q^{-1}XP^{-1} = \begin{pmatrix} a & {}^t\mathbf{b} \\ \mathbf{c} & X' \end{pmatrix}$$

とする。この時、$(B)(Q^{-1}XP^{-1}) = (PAQ)(Q^{-1}XP^{-1}) = P(AX)P^{-1} = E$ より

$$\begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & {}^t\mathbf{b} \\ \mathbf{c} & X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \dots \\ \dots & A'X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & E \end{pmatrix}$$

つまり A’X’=E となる。
A’ は (k-1) 次正方行列なので、仮定より A’ は正則である。
よって、B に補題 1.2 を適用すると、B は正則である。
$A = P^{-1}BQ^{-1}$ であり、P^{-1}, B, Q^{-1} はいずれも正則なので、その積である A も正則である。よって、この場合も定理は成立する。

(i)(ii) より、AX=E の場合において、定理は成立する。

XA=E の場合は、$(Q^{-1}XP^{-1})(B) = Q^{-1}(XA)Q = E$ について同様の事を行えばよい。以上より示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

2　標準形と階数

2.1　解形

定義 2.1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & X \\ & & 1 & \\ \hline & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{array}\right)$$

の形の行列を、適当な名前が一般に無いので、解形と呼ぶことにする。

定理 2.1 行基本変形と列の交換のみを以て、任意の行列を解形に変形できる。

(proof)

一列目から順に、対角要素を要に列を掃き出す。対角要素が 0 でこれが不可なるときは、行基本変形によって、これを非 0 にする。これも不可、すなわち、列の要素がすべて 0 である場合は、列の交換によって、非 0 要素をもつ列を持ってくる。これすら不可能なときは、その列以降はすべて要素が 0 ということであり、それは既に解形に達している。

この操作を解形に至るまで繰り返す。上で見たように、操作に行き詰ったときは解形に達したということである。従って、任意の行列を、必ず解形に変形することが出来る。 $\boxed{\text{証明終}}$

2.2　標準形

定義 2.2

$$E(r) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \mathit{0} \\ & \ddots & & \Big\} r\ \text{個} & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ \mathit{0} & & & & & 0 \end{array}\right)$$

の形を標準形という。

定理 2.2 任意の行列は、基本変形によって一意的に標準形に変形できる。

(proof)
定理 2.1 によって、任意の行列は基本変形によって解形に変形できる。そして、解形 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \mathrm{X} \\ & & 1 & \\ \hline & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{array}\right)$ は、その左側の列 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ を用いて列基本変形を行えば、容易に標準形に変形できる。よって、任意の行列を基本変形によって標準形に変形できる。

ここで、任意の行列 A が、基本変形によって二つの標準形 $E(r), E(r')(r{\neq}r')$ に変形できたとすると、定理 1.3 より、正則行列 P,Q,R,S を用いて、

$$A = PE(r)Q = RE(r')S$$

と表せる。つまり、

$$E(r) = (P^{-1}R)E(r')(SQ^{-1})$$

となる。

ここで、一般性を失わず $r > r'$ とし、左上の要素が r' 次正方行列になるよう以下のように対称区分けを行う。

$$P^{-1}R = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, SQ^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$$

この時、

$$E(r) = (P^{-1}R)E(r')(SQ^{-1}) = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

しかし、$r > r'$ なので、区分け方を考えると、右下の要素が 0 であるのは矛盾。従って、r=r' であり、標準形への変形は一意的である。 証明終

2.3 階数

定義 2.3 前定理 *2.2* より、任意の行列 *A* に対し、一意的に標準形 *E(r)* が定まるが、このときの *r("1"*が並んでいる個数*)* を**階数**といい、*rankA* で表す。

定理 2.2 系 解形 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \text{X} \\ & & 1 & \\ \hline & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{array}\right)$ の、左上の部分の大きさは、もとの行列の階数に等しい。

今定義した階数によって、正則の概念を言い換えることが出来る。

定理 2.3 n 次正方行列 A が正則 $\leftrightarrow rankA = n$

(proof)

(i)rankA = n のとき

正則行列 P,Q を用いて、PAQ=E(n)=E となる。$\therefore\ A = P^{-1}Q^{-1}$ であり、P^{-1}, Q^{-1} が正則なので、A も正則である。

(ii)A が正則のとき

$rankA \neq n$ とすると $rankA < n$ であり、正則行列 P,Q によって、$PAQ = E(rankA)$ となる。つまり

$$A = P^{-1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & \left.\right) rankA\text{個} & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{array}\right)Q^{-1}$$

となる。これにどんな行列をかけても、区分けの右下の要素は 0 にしかならず、$AX = E$ となる X が存在しないことになり、A が正則であるということに矛盾する。従って、$rankA = n$ である。 $\boxed{\text{証明終}}$

2.4 連立一次方程式の解

さて、ここで連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を基本変形によって求めることを考える。まず、A が解形であればすぐにその解がわかることを示す。

定理 2.4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & X \\ & & 1 & \\ \hline & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{array}\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

の解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{cases} \boldsymbol{b} & \text{階数}\, r = n\, \text{のとき} \\ \boldsymbol{b} + \begin{pmatrix} \text{-}X \\ E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{r+1} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \ (c_{r+1}, \cdots, c_n \text{は任意}) & \text{階数}\, r < n\, \text{のとき} \end{cases}$$

となる。ただし、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}$ は n 次縦ベクトルで、$\begin{pmatrix} b_{r+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ でなくてはならない。

(proof)

r=n のときは、(解形)=(単位行列) なので、明らか。$r < n$ のときを考える。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ とすると、

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \mathrm{X} \\ & & 1 & \\ \hline & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ \hline x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} + \mathrm{X}\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\ \hline \mathbf{O} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ \hline b_{r+1} \\ \vdots \\ b_n \end{array}\right)$$

従って、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \text{-}\mathrm{X}\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{r+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

でなくてはならない。この時、

$$\boldsymbol{x} = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ \hline x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right) = \boldsymbol{b} + \left(\begin{array}{c} \text{-X} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}\right) = \boldsymbol{b} + \begin{pmatrix} \text{-X} \\ \text{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

である。$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に特に制限はないが、確かに、

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \text{X} \\ & & 1 & \\ \hline & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{array}\right) \begin{pmatrix} \text{-X} \\ \text{E} \end{pmatrix} = \text{X-X} = \mathbf{0}$$

であり、任意の値を取り得る。$\boxed{\text{証明終}}$

一般の A については、定理 2.1 に基づき、行基本変形の積 P と列の交換の積 Q によって、$PAQ = (\text{解形})$　$A = P^{-1}(\text{解形})Q^{-1}$ とし、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad P^{-1}(\text{解形})Q^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad (\text{解形})(Q^{-1}\boldsymbol{x}) = P\boldsymbol{b}$$

と変形して、定理 2.4 により、

$$(Q^{-1}\boldsymbol{x}) = \begin{cases} P\boldsymbol{b} & rankA = n \text{ のとき} \\ P\boldsymbol{b} + \begin{pmatrix} \text{-X} \\ \text{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{r+1} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} (c_{r+1}, \cdots, c_n \text{は任意}) & rankA < n \text{ のとき} \end{cases}$$

と $\boldsymbol{x}$ の変数の位置を交換した $(Q^{-1}\boldsymbol{x})$ について解き、最後に交換の積 Q について戻せばよい。定理としてまとめておく。

定理 2.5 n 元連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解については、行基本変形 P と列の交換 Q のみによって、$PAQ = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & X \\ & & 1 & \\ \hline & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{array}\right)$

となるとき、

$$
\boldsymbol{x} = \begin{cases} QP\boldsymbol{b} & rankA = n \text{のとき} \\ QP\boldsymbol{b} + Q \begin{pmatrix} \text{-}X \\ E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{rankA+1} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} (c_{rankA+1}, \cdots, c_n \text{は任意}) & rankA < n \text{のとき} \end{cases}
$$

となる。

2.5　基本変形による逆行列の計算法

定理 2.6 正則行列は、行 *(*列*)* 基本変形のみによって、E に変形できる。

(proof)

行列 A が正則なら、rankA = n より、正則行列 P,Q を以て、PAQ=E(n)=E と表せる。$\therefore PA = Q^{-1}$　$(QP)A = E$　(QP) は基本変形の積なので、確かに、正則行列 A は行基本変形のみによって E に変形できる。 証明終

前定理 2.6 は、逆行列の、基本変形を用いた計算法の基礎になっている。行基本変形のみによって、正則行列 A を、単位行列 E に変形できる。この時、基本行列の積である正則行列 P によって $PA = E$ となる。すると、この P が A の逆行列になっている。

つまり、$[A|E]$ と並べて書き、同じ行基本変形をこれらに処理して、左側を単位行列に変形すれば、最終的に $[E|P] = [E|A^{-1}]$ となり、逆行列が求まるわけである。

Tea Break:王翦

王翦 (おうせん) は、秦の始皇帝 (秦王政) 時代の将軍である。その将軍としての軍歴は、趙との戦いから始まる。趙と秦は、長く戦争状態にあり、秦昭襄王 47 年 (BC260) 年には、秦の将軍である武安君白起が長平において　45 万を超える趙軍を撃破したということもあった。そのとき、趙の 40 万もの兵が降伏したが、　彼らが秦に対し繰り返し反旗を翻してきた経緯を思い、白起は少年兵 140 人を除いてこれをことごとく生き埋めにしたのだった。趙の衰退はここから始まったが、26 年を経ても未だその社稷を保っていた。

始皇 11 年 (BC236 年)、一軍を預かる身となっていた王翦は、桓?(かんぎ)・楊端和 (ようたんわ) らとともに、趙都邯鄲の南の近くにある、?への攻撃に参加した。?はなかなか抜けず、さしあたって周辺の 9 城を占拠した。二将をそこに留め、自らはさらに、東方の閼与 (あつよ) と?楊 (ろうよう) を占拠して再び合流した。王翦は、全軍のうち精鋭 2 割を選りすぐって、以て?を攻めこれを陥落させた。

始皇 13 年から 14 年には、桓?が趙を攻め、平陽を陥落させた。始皇 15 年にも軍を発したが、特筆すべき戦果はなかった。始皇 17 年には韓を滅ぼし、これを秦の一郡とした。

始皇 18 年には、王翦は、楊端和・羌?(きょうかい) らとともに、大軍を以て再び趙を攻めた。羌?は北方の代を討ち、楊端和は邯鄲を包囲した。王翦は井?を抜き、邯鄲の包囲に参加した。趙にはいまだ名将李牧がおり、趙都邯鄲は簡単には落ちなかった。秦は趙臣を買収して李牧を讒言させ、これを前線から取り除いた。始皇 19 年にはついに邯鄲を抜き、平陽で趙王を捕らえ、計一年余りを要して、ついにその国土をことごとく平定し、秦の一郡とした。政 (始皇帝) は、こ

の子供時代に人質として過ごした邯鄲に、自ら赴いて敵対関係にあったものを生き埋めにすることで復讐した。趙の公子の嘉が一族を率いて代で自立して王となり、燕と共闘体制をとった。

始皇 20 年、燕の公子丹が送り込んだ刺客・荊軻が秦王政の暗殺を謀った。丹は秦の勢力が迫ってきていることを憂え、対策に頭を悩ませていた。そんな折、秦から樊於期将軍が亡命してきた。秦は樊於期の一族を皆殺しにし、樊於期本人にも多額の懸賞と所領をかけていた。既に秦は韓を併合していた。秦に攻撃の口実を与えるべきではないと反対する臣下もいたが、丹は見捨てることが出来ず、腹をくくって亡命を許可した。しかし、秦対策をしなければならないことには変わりなく、これについて諮問したところ、紹介されたのが文武両道の誉れ高き荊軻だった。丹は、秦王に会ってこれを脅し、諸侯の土地を返還しないのであれば殺すように依頼した。難色を示す荊軻に丹は取りすがり、ついに荊軻はこれを受け入れた。丹は荊軻に最上級の待遇を与えた。

時は流れて、始皇 20 年、既に王翦は趙を破り、燕に迫っていた。公子丹の催促でついに荊軻は出発を決めた。秦王に確実に謁見するために荊軻は二つのものを要求した。ひとつは肥沃な地・督亢の地図。地図を渡すことは、その地そのものを献上するということである。もうひとつは、樊将軍の首だった。丹が二つ目の首の方に難色を示したため、荊軻は自ら樊於期に会いに行き、秦王に復讐するため首を預けてくれぬかと頼んだ。樊於期は、「此れ臣の日夜切歯拊心せしもの也。乃ち今教えを聞くを得たり。」といって、自ら首を刎ねた。また、丹が鋭い匕首 (あいくち) を探し求めさせたところ、趙の名工の作によるものを見つけた。毒薬を塗って死刑囚に用いると、かすり傷でも即死するほどだった。

出発の日、燕の要人たちは、国境の易水まで荊軻を見送った。荊軻はこう歌った、「風は蕭々として易水寒し壮士ひとたび去って復た還らず」車に乗った荊軻は二度と振り返らなかった。

燕が樊将軍の首と肥沃な土地を献じて臣従すると聞いて、秦王政は非常に喜び、礼を尽くして使者を迎えた。謁見の際、荊軻は秦王の言に従って地図を秦王に見せた。それを開き終わったとき、匕首が現れ、荊軻はその瞬間に秦王に飛びかかった。秦王はとっさに避けた。荊軻が王を追いかける間、群臣たちは狼狽するのみだった。勅命無しに、武器を携帯する者は、殿上に上がることを許されていないのだった。ただ侍医の夏無且が薬の箱を投げつけ、この隙に王が剣を抜き、荊軻を斬った。生かしておいて太子に詫びさせようとしたのが失敗だった、と言い残し、荊軻は秦王の側近に絶命せしめられた。

結局、暗殺計画は失敗した。当然怒った政は王翦と辛勝 (将軍の名) に攻撃を命じた。王翦は、燕・代連合軍を易水の西で撃破した。

始皇 21 年、王翦は燕都薊城を陥落させた。燕王喜と公子丹は精鋭を率いて遼東に逃れて篭城したが、秦の若手の将軍李信がこれを攻撃した。燕王は、もと趙の王族である代王嘉の進言を容れて、公子丹の首を秦に献じたが、無意味であった。

燕王がいまだ遼東に篭っているとはいえ、燕都を手に入れ事実上これを追い込んだ秦王は、今度は、楚を討ちたいと思った。燕との戦いで功績を上げた若手の将軍李信を、秦王政は勇武にして賢明とし、楚を討つために必要な兵力を問うた。李信は答えた、「20 万あれば十分でしょう。」王は、王翦にも諮問した。王翦は答えた、「60 万の兵力がなければ無理でしょう。」始皇帝はこう言った。「王将軍も老いてしまった。なんと臆病なことよ。李将軍は勇壮で、その言はやはり正しい。」そして、李信と蒙恬に命じて、20 万の兵を与え、楚を攻撃させた。王翦は、意見が用いられなかったので、老病を理由にして、引退して故郷へ帰った。

王翦は引退したが、王翦には王賁 (おうほん) という子がおり、将軍として、王翦に劣らぬほどの才能を持っていた。始皇 21 年の燕都薊城攻めの際には、王翦に先立ちこれを攻撃している。

始皇 22 年には、王賁が大将となって、出兵が行われた。まずは、楚と戦って、これに勝利した。そのまま、引き返して、今度は魏を撃った。魏都大梁を抜くのに、王賁は奇策を用いた。黄河から水路を導いて水を引き、大梁に注いで水攻めしたのである。これにより大梁城は崩壊し、魏王は降伏した。秦は魏の領地をことごとく収めた。

一方、20 万の兵力で楚を攻める李信と蒙恬の軍は、緒戦、それぞれ平輿・寝 (地名) を攻めて大勝した。その後、西進して城父で合流したが、楚軍は強行軍でこれを追跡していた。三日三晩に及ぶ戦いで、楚は秦軍を大破し、7 人の都尉 (中級指揮官) を殺して、李信を敗走させた。

秦王はこれを聞いて激怒するとともに、王翦の言葉が、弱気からではなく、正確な考察から来ていたことを悟り、自ら王翦の隠居していたところへ赴いた。王はこう陳謝した、「寡人が将軍の計を用いなかったばかりに、果たして李信が秦軍の名を辱めてしまった。今、楚の軍勢は日ごとに西進しているという。将軍は病気と言えども、寡人を見捨てはしないだろう？」王翦は辞退して言った、「老臣は病み疲れ、頭も混乱しています。大王は、より賢い将軍をお選びください。」政は「やめてくれ。そんなことは言わないでくれ。」と謝した。王翦は答えた、「大王がやむを得ず臣を用いられますなら、60 万の兵力がなければ出来ません。」王は「将軍の計の通りにしよう。」と言った。

始皇 23 年、こうして王翦は 60 万の兵を率いて楚を討つこととなった。これは秦の動員可能兵力のほとんどだった。楚は、すでに数々の勝利で諸侯に名の轟いていた王翦が、大兵力で攻めてくると聞き、こちらもまた国中の兵を動員して迎撃態勢をとった。秦王は自ら、王翦をは水まで見送った。途中、王翦は上等の所領・邸宅・庭園をしきりに懇願し、古くから秦を守る要塞地点であった函谷関に着いてからも、5 度も使者を派遣して、実り多き所領を請願した。秦王

は、貧乏を憂える必要などあろうか、と言って笑った。ある人が王翦に、ねだり過ぎでしょう、といった。王翦は答えた、「そうではないのだ。もとより秦王は粗雑で猜疑心が強いのに、私に今秦の全兵力を委ねている。子孫のために所領や邸宅を請って地位を固めようとしなければ、かえって王に私を疑わせることになるのではないか。」

王翦は、陣を固めて守りに徹し、士卒を休養させ、好待遇を与えた。楚軍は何度も戦いを仕掛けたが、王翦は動かなかった。王翦が士卒の様子を部下に見に行かせると、石を投げたり飛び跳ねたりして遊んでいた。王翦はこれを聞いて「使える」と言った。

楚軍は、何度も挑戦したが王翦が動かないので、大軍は兵糧を喰うということもあり、東へ撤退を始めた。王翦はその機に討って出て、これを大破した。敗走する楚軍を全軍を以て追撃した。王翦は楚王を捕らえ、平輿に至るまでの地を占領した。楚将項燕 (項羽の祖父) が秦の昌平君を立てて王とし、秦に叛旗を翻した。

始皇 24 年、王翦と蒙武が昌平君を討って戦死させ、項燕も自殺に追い込み、楚軍は壊滅した。楚の領域をことごとく秦の郡県とした。

始皇 25 年、秦は、王賁を大将とし、李信らも従軍する大軍を発した。遼東に逃れていた燕王を討ち、これを虜にした。返す刀で代王も捕らえ、北方を平定した。一方、王翦は、併合した楚の領土を基地として南方の百越を討ち、これを滅ぼして会稽郡を置いた。斯くして、六国のうち、斉を除く五国が滅んで秦の郡県となった。

始皇 26 年 (BC221 年)、かつて范雎が遠交近攻を進言して以来、干戈を交えることのなかった斉が、ついに秦と断交し、戦争準備を始めた。秦は、王賁を燕から南下させ、斉を攻撃させた。斉王は捕らえられ、斉も滅んだ。ここに於いてついに秦は天下を統一した。秦王政は、始皇帝と称するようになった。王翦・王賁は天下統一に多大なる武功があったので、その名声は後世にまで聞こえた。

参考文献:平凡社 中国古典文学大系 史記: 徳間書店 中国の思想 第二巻 戦国策

漢籍電子文獻 http://www.sinica.edu.tw/ftms-bin/ftmsw3

3　行列式と多重線形性及び交代性

3.1　多重線形性

正方行列を定義域とする関数$\mathbf{F}(\mathbf{A})$ を考える。関数の値が何であるか (複素数だとかベクトルだとか) は、複素数の線形結合が取れさえすれば、特に問わない。(n,n) 正方行列 A を、列ベクトルに分解して $\mathbf{A} = (\mathbf{a_1}, \cdots, \mathbf{a_n})$ と表すことにする。そして、ここに多重線形性という性質を導入する。

定義 3.1 正方行列を定義域とする関数 $F(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ が**多重線形性**を持つとは、以下の条件を満たすことである。

1. $F(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \underline{\boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}'_j}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = F(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \underline{\boldsymbol{a}_j}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) + F(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \underline{\boldsymbol{a}'_j}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$
2. $F(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \underline{c\boldsymbol{a}_j}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \underline{c}F(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \underline{\boldsymbol{a}_j}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$

標語的に言えば、各列ベクトルに対して線形性が成り立つということである。「多重」というのは、全体ではなくて、*(*一般には*)* 複数あるおのおのの列ベクトルに関して成り立つ性質だからである。n 重線形性とも言う。

この性質を用いて、関数 F を分解することを考える。単位列ベクトル $<\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n>$ を $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ と定めておく。

定理 3.1 正方行列 A の *(i,j)* 成分を a_{ij} と表すとき、Fが多重線形性を持つなら、

$$F(A) = F(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = a_{i(1)1}a_{i(2)2}\ldots a_{i(n)n}F(\boldsymbol{e}_{i(1)}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i(n)})$$

となる。ただし、アインシュタインの規約を用いている。
*(*同じ添え字が出たら和をとる、つまり、$\sum_{i(1)=1}^n \sum_{i(2)=1}^n \cdots \sum_{i(n)=1}^n$ が省略されている。*)*

(proof)
$\boldsymbol{a}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}\boldsymbol{e}_i$ なので、多重線形性より、

$$\begin{aligned} F(A) = F(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) &= F(\sum_{i(1)=1}^n a_{i(1)1}\boldsymbol{e}_{i(1)}, \cdots, \sum_{i(n)=1}^n a_{i(n)n}\boldsymbol{e}_{i(n)}) \\ &= \sum_{i(1)=1}^n \cdots \sum_{i(n)=1}^n F(a_{i(1)1}\boldsymbol{e}_{i(1)}, \cdots, a_{i(n)n}\boldsymbol{e}_{i(n)}) \\ &= \sum_{i(1)=1}^n \cdots \sum_{i(n)=1}^n a_{i(1)1}\cdots a_{i(n)n}F(\boldsymbol{e}_{i(1)}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i(n)}) \end{aligned}$$

これに、アインシュタインの規約を用いればよい。 $\boxed{\text{証明終}}$

以後、**アインシュタインの規約を説明無しに用いる**ので、注意されたい。

補題 3.2 正方行列を定義域とする関数 $F(A)$ について、$A=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ にすべての要素が *0* である列があれば、$F(A)=0$

(proof)
$A=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ とすると、適当なベクトル $\boldsymbol{x}$ をとれば、

$$\begin{aligned}F(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{a}_n) &= F(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x},\cdots,\boldsymbol{a}_n)\\ &= F(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{x},\cdots,\boldsymbol{a}_n)+F(\boldsymbol{a}_1,\cdots,-\boldsymbol{x},\cdots,\boldsymbol{a}_n)\\ &= F(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{x},\cdots,\boldsymbol{a}_n)-F(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{x},\cdots,\boldsymbol{a}_n)\\ &= 0\end{aligned}$$

証明終

3.2 交代性

定義 3.2 関数 $F(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ が**交代性**を持つとは、定義域の要素を交換すると、関数 F の値が $(-\boldsymbol{1})$ 倍 されるということである。

前定理 3.1 の式に出てくる $F(\boldsymbol{e}_{i(1)},\cdots,\boldsymbol{e}_{i(n)})$ を整理したいというのが、交代性導入のモチベーションである。要するに、交換を基礎単位に、$\boldsymbol{e}_{i(1)},\cdots,\boldsymbol{e}_{i(n)}$ を $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ に並べ換えようというのである。そのためには、まず交換の性質について知っておく必要がある。なお、順列の並び換えのことを**置換**ともいう。

定理 3.3 $[1,\cdots,n]$ を置換した任意の順列 *($[3,2,1,4,\cdots]$ など)* を、交換のみによって、もとの順列 $[1,\cdots,n]$ に戻すことができる。

(proof)
$[1,\cdots,n]$ を置換した任意の順列を $[\sigma_1,\cdots,\sigma_n]$ と表すことにする。まず最初の二項 (σ_1,σ_2) の大小を比較し、大きい方が後ろに来るよう適宜交換する。処理を施した後の順列で、今度は第 2 項と第 3 項の大小を比較して、これも大きい方が後ろに来るよう適宜交換する。この操作を (第 3 項と第 4 項),(第 4 項と第 5 項),$\cdots$ と順列の最後にいたるまで行う。すると、処理後の順列の最後に、要素の中で最も大きい「n」が必ず来る。

同じ処理を (第 1 項と第 2 項) から (第 n-2 項と第 n-1 項) まで再び行えば、処理後の順列の第 n-1 項に、1〜(n-1) で最も大きい「n-1」が必ず来る。この処理を繰り返せば、後ろから順に大きい順に確定していくことができ、最終的には $[1,\cdots,n]$ の形になる。 証明終

これは、いわゆる「バブルソート」といわれる処理である。これによってわかる任意の順列 $[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ を $[1, \cdots, n]$ に置換するときの交換の処理を、$[1, \cdots, n]$ に対しまったく逆に行えば、任意の順列 $[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ を作ることもできる。結局まとめると、**任意の置換を交換の積によって表せる**、ということになる。

さて、$[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ を交換によって $[1, \cdots, n]$ に置換するやり方は、ひとつだけではなく、任意性があるが、交換の回数には制限がある。それを調べるために、差積というものを準備する。

定義 3.3 差積

$$\Delta(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i<j}(x_j - x_i) = \boxed{\begin{array}{cccc} (x_n - x_{n-1}) & (x_n - x_{n-2}) & \cdots & (x_n - x_1) \\ & (x_{n-1} - x_{n-2}) & \cdots & (x_{n-1} - x_1) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & (x_2 - x_1) \end{array}}$$

標語的に言えば、差積とは、$x_1, \cdots, x_n$ の中で、位置が相対的に後ろにあるものを前にして、すべての組み合わせについて差をとったものの積である。

定理 3.4 差積は交代性を持つ、つまり、

$$\Delta(x_1, \cdots, \underline{x_l}, \cdots, \underline{x_m}, \cdots, x_n) = -\Delta(x_1, \cdots, \underline{x_m}, \cdots, \underline{x_l}, \cdots, x_n)$$

となる。*(ただし $l \leq m$)*

(proof)

差積の中でも、交換に関与してくるのは、x_l または x_m を含む項である。それぞれ列挙してみる。

$x_l : (x_n - x_l), \cdots, (x_{l+1} - x_l), (x_l - x_{l-1}), \cdots, (x_l - x_m), \cdots, (x_l - x_1)$

$x_m : (x_n - x_m), \cdots, (x_l - x_m), \cdots, (x_{m+1} - x_m), (x_m - x_{m-1}), \cdots, (x_l - x_1)$

このうち、$(x_l - x_m)$ だけが重複して列挙されている。その他の項は、

$x_l : (x_n - x_l), \cdots, (x_{l+1} - x_l), (x_l - x_{l-1}), \cdots, (x_l - x_1)$

$x_m : (x_n - x_m), \cdots, (x_{m+1} - x_m), (x_m - x_{m-1}), \cdots, (x_l - x_1)$

であり、x_l と x_m を交換しても、既にある項どうしが置き換わるだけで、何も変化しない。ただ、$(\mathbf{x_l} - \mathbf{x_m})$ だけが、$(\mathbf{x_m} - \mathbf{x_l}) = -(\mathbf{x_l} - \mathbf{x_n})$ と **(-1) 倍**される。以上をまとめると、交換されると、差積は **(-1) 倍**されるということになり、定理は示された。 証明終

定理 3.4 系 k 回の交換によって、$[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ が $[1, \cdots, n]$ に置換されるとき、$\Delta(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = (-1)^k \Delta(1, \cdots, n)$ である。

定理 3.5 $[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ を $[1, \cdots, n]$ に置換するときの交換の回数は、交換の仕方によらず、偶奇が一致しなくてはならない。

(proof)
$[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ を $[1, \cdots, n]$ にする置換が、二通りの、それぞれ k 回,l 回の交換の積として表されているとする。このとき、定理 3.4 系より、

$$\begin{aligned}\Delta(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) &= (-1)^k \Delta(1, \cdots, n) \\ &= (-1)^l \Delta(1, \cdots, n)\end{aligned}$$

が成り立つ。$\Delta(1, \cdots, n) \neq 0$ なので $(-1)^k = (-1)^l$。よって、k と l の偶奇は一致していなければならない。 証明終

定義 3.4 定理 *3.5* より、あるもとの順列を置換した順列は、奇数回の交換によって置換されるものと、偶数回の交換によって置換されるものとがある。これを、それぞれ**奇置換, 偶置換**という。定理 *3.3* より、重複のない順列はかならず奇置換か偶置換のどちらかである。

(例)
123 の並び替え
偶置換:123,231,312
奇置換:321,132,213

ここにいたって、交代性の表す意味が見えてくる。

定理 3.6 関数 $F(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ が交代性を持つとき

$$F(\boldsymbol{a}_{\sigma_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{\sigma_n}) = \begin{cases} F(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) & [\sigma_1, \cdots, \sigma_n] \text{ が } [1, \cdots, n] \text{ の偶置換} \\ -F(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) & [\sigma_1, \cdots, \sigma_n] \text{ が } [1, \cdots, n] \text{ の奇置換} \\ 0 & \text{そのほかの場合} \end{cases}$$

(proof)
(i)$[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ が $[1, \cdots, n]$ の偶置換である場合
$[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ を偶数回の交換によって、$[1, \cdots, n]$ に置換できる。よって、交代性より $F(\boldsymbol{a}_{\sigma_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{\sigma_n}) = (-1)^{(\text{偶数})} F(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = F(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$

(ii)$[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ が $[1, \cdots, n]$ の奇置換である場合
$[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ を奇数回の交換によって、$[1, \cdots, n]$ に置換できる。よって、交代性より $F(\boldsymbol{a}_{\sigma_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{\sigma_n}) = (-1)^{(\text{奇数})} F(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = -F(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$

(iii) その他の場合
$[\sigma_1,\cdots,\sigma_n]$ が $[1,\cdots,n]$ の奇置換でも偶置換でもないということは、$[\sigma_1,\cdots,\sigma_n]$ は、重複を含むということである。その重複したものを交換しても関数 F の値は変わらないが、交代性より $F=-F$。つまり $F=0$ である。 $\boxed{\text{証明終}}$

実のところ、この定理 3.6 は逆も成り立つので、定理の条件は交代性と同値である。(証明は容易)

さて、ここで交代性の性質を表しやすくするため、新しい記号 (関数) を導入する。

定義 3.5 *1〜n* の自然数を要素とする n 次元横ベクトル $(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ を定義域とする関数 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma_1},\cdots,\boldsymbol{\sigma_n})$ を以下のように定める。

1. ε は交代性を持つ
2. $\varepsilon(1,\cdots,n)=1$

これは、定理 *3.6* よりただちに、

$$\varepsilon(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)=\begin{cases}1 & [\sigma_1,\cdots,\sigma_n]\text{ が }[1,\cdots,n]\text{ の偶置換}\\ -1 & [\sigma_1,\cdots,\sigma_n]\text{ が }[1,\cdots,n]\text{ の奇置換}\\ 0 & \text{そのほかの場合}\end{cases}$$

である。*3* 次の場合は、「レビ・チビタの完全反対称テンソル」といわれているものと同じになる。

これを用いると、定理 3.6 は、こう書き換えられる。
定理 3.6 系 関数 $F(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ が交代性を持つとき

$$F(\boldsymbol{a}_{\sigma_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{\sigma_n})=\varepsilon(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)F(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$$

3.3 行列式

正方行列を定義域とする関数 F(A) に、多重線形性に加えて、交代性を導入すると、以下のようになる。

定理 3.7 正方行列 A の *(i,j)* 成分を a_{ij} と表すとき、Fが多重線形性及び交代性を持つなら、

$$F(A)=F(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=\varepsilon(i(1),\cdots,i(n))a_{i(1)1}a_{i(2)2}\dots a_{i(n)n}F(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$$

となる。

(proof)
　多重線形性と交代性を用いて

$$\begin{aligned} F(A) = F(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) &= a_{i(1)1} \cdots a_{i(n)n} F(\boldsymbol{e}_{i(1)}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i(n)}) \quad (\because \text{定理 } 3.1) \\ &= a_{i(1)1} \cdots a_{i(n)n} \{\varepsilon(i(1), \cdots, i(n)) F(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\} \quad (\because \text{定理 } 3.7) \\ &= \varepsilon(i(1), \cdots, i(n)) a_{i(1)1} a_{i(2)2} \ldots a_{i(n)n} F(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \end{aligned}$$

証明終

　これにより、$F(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = F(E)$ さえ決まれば、関数 F の具体的な形を定めることができるのである。そこで、行列式を、多重線形性と交代性を持つ最も単純な形として定義する。

定義 3.6 正方行列 A の行列式 $|A| = det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ を以下のように定める。

1. $|A| = det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ は多重線形性及び交代性を持つ。
2. $F(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = F(E) = 1$

これは、正方行列 A の *(i,j)* 成分を a_{ij} と表すとき、定理 *3.7* よりただちに、

$$|A| = det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \varepsilon(i(1), \cdots, i(n)) a_{i(1)1} a_{i(2)2} \ldots a_{i(n)n}$$

である。

　これを用いて定理 3.7 を書き直すとこうなる。

定理 3.7 系 正方行列を定義域とする関数 F(A) が多重線形性及び交代性を持つなら、

$$F(A) = F(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) F(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = |A| F(E)$$

　多重線形性及び交代性の性質を行列式に特化した形で述べなおす。

補題 3.2 系 $A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ にすべての要素が 0 である列があれば、$|A| = det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = 0$

定理 3.6 系 $A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ に重複する列があれば (つまり、同じ列が複数あれば)、$|A| = det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = 0$

　前者が多重線形性の性質、後者が交代性の性質である。

　さて、行列には積という演算があるが、積の行列式は非常によい性質を持っている。

定理 3.8 $|AB| = |A||B|$

(proof)
正方行列を定義域とする関数 $F(X) = F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ を $F(X) = |AX|$ によって定める。$|AX| = det(A\boldsymbol{x}_1, \cdots, A\boldsymbol{x}_n)$ なので、$F(X) = |AX| = F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ が多重線形性および交代性を持つことがすぐにわかる。従って、定理 3.7 系より、$|AX| = F(X) = |X|F(E) = |X||AE| = |A||X|$ よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

これは極めて重要な性質であり、以後、明示することなく用いる。

似たような感じで、便利な補題を示しておく。

補題 3.9

$$\begin{vmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & X \end{vmatrix} = |X|$$

(proof)
$F(X) = F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \begin{vmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n \end{vmatrix}$ とすると、この $F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ は多重線形性及び交代性を持つことが容易にわかる。従って、定理 3.7 系より

$$\begin{vmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & X \end{vmatrix} = F(X) = |X|F(E) = |X| \begin{vmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E \end{vmatrix} = |X||E| = |X|$$

$\boxed{\text{証明終}}$

3.4 基本変形と行列式

基本変形を行うと、行列式がどう変化するかを考える。いまは、列ベクトルに対する多重線形性及び交代性しか定義していないので、さしあたり、ここでは列基本変形を扱う。

定理 3.10 列の交換に対して、行列式は (-1) 倍される。

(proof)
交代性そのものである。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 3.11 列の $c(\neq 0)$ 倍に対して、行列式は c 倍される。

(proof)
多重線形性から明らか。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 3.12 ある列の c 倍を他の列に足す基本変形に対しては、行列式は変わらない。

(proof)
　j 列の c 倍を i 列に足す変形について考える。

$$
\begin{aligned}
&det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \\
&= det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n) + c\,det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \quad (\because \text{多重線形性}) \\
&= det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n) + c \cdot 0 \quad (\because \text{定理 3.6 系}) \\
&= det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n)
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{証明終}}$

　ところで、列基本変形は、それぞれ以下の (正則) 行列を右からかけることで実現される。

1. i 列と j 列の交換:Ex(i,j)= $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & (i\,\text{列}) & & (j\,\text{列}) & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ (i\,\text{行}) \\ \\ (j\,\text{行}) \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. i 列の c($\neq$ 0) 倍:Scl(c;i)= $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & (i\,\text{列}) & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ (i\,\text{行}) \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. i 列の c 倍を j 列に足す:SA(c;j,i)= $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & (i\,\text{列}) & & (j\,\text{列}) & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ (i\,\text{行}) \\ \\ (j\,\text{行}) \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & c & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

これらの行列式の値については、既に見た基本変形に対する行列式の変化を用いれば、以下のように計算できる。

$$\begin{array}{llll} |E\cdot Ex(i,j)| & =|Ex(i,j)| & =-|E| & =-1 \\ |E\cdot Scl(c;i)| & =|Scl(c;i)| & =c|E| & =c(\neq 0) \\ |E\cdot SA(c;i,j)| & =|SA(c;i,j)| & =|E| & =1 \end{array}$$

これにより、さしあたり、このようなことがいえる。

補題 3.13 基本変形を表す行列の行列式は *0* でない。

これを用いると、正則性を行列式を用いて言い換えることができる。

定理 3.14 $\begin{cases} \text{正方行列 } A \text{ が正則} & \leftrightarrow |A|\neq 0 \\ \text{正方行列 } A \text{ が正則でない} & \leftrightarrow |A|=0 \end{cases}$

(proof)

正方行列 A を基本変形によって標準形に変形する。このとき、基本変形の積 P,Q を用いて、

$$A=PE(rankA)Q$$

と表せる。(「標準形と階数」の章を参照) これより、

$$|A|=|P||E(rankA)||Q|$$

である。補題 3.13 より、$|P|\neq 0, |Q|\neq 0$ なので、$|A|$ が 0 か否かは、$|E(rankA)|$ のみにより決まる。補題 3.2 系より、

$$|E(rankA)|=\begin{cases} 1 & rankA=n \text{ のとき} \\ 0 & rankA<n \text{ のとき} \end{cases}$$

なので、$\begin{cases} rankA=n & \leftrightarrow |A|\neq 0 \\ rankA<n & \leftrightarrow |A|=0 \end{cases}$ である。ここで、定理 2.3 より、

$$\begin{cases} \text{正方行列 } A \text{ が正則} & \leftrightarrow rankA=n \\ \text{正方行列 } A \text{ が正則でない} & \leftrightarrow rankA<n \end{cases}$$

なので、定理が示される。 $\boxed{\text{証明終}}$

さて、次は同様に行列の転置について見てみる。

補題 3.15 基本行列を表す行列の行列式は転置しても変わらない。

(proof)
　形を見れば明らかに、

$$\begin{cases} {}^tEx(i,j) = Ex(i,j) \\ {}^tScl(c;i) = Scl(c;i) \\ {}^tSA(c;i,j) = SA(c;j,i) \end{cases}$$

であるから、それぞれの行列式を計算すると、

$$\begin{cases} |{}^tEx(i,j)| = |Ex(i,j)| \\ |{}^tScl(c;i)| = |Scl(c;i)| \\ |{}^tSA(c;i,j)| = |SA(c;j,i)| = 1 = |SA(c;i,j)| \end{cases}$$

よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

　これは、ただちにすべての正方行列に拡張することができる。

定理 3.16 $|{}^tA| = |A|$

(proof)
　正方行列 A を基本変形によって標準形に変形する。このとき、基本変形の積 P,Q を用いて、

$$A = PE(rankA)Q$$

と表せる。このとき、

$${}^tA = {}^tQ{}^tE(rankA){}^tP = {}^tQE(rankA){}^tP$$

である。よって、

$$|{}^tA| = |{}^tQ||E(rankA)||{}^tP|$$

である。補題 3.15 より、$|{}^tP| = |P|, |{}^tQ| = |Q|$ なので、

$$|{}^tA| = |Q||E(rankA)||P| = |P||E(rankA)||Q| = |PE(rankA)Q| = |A|$$

となる。 $\boxed{\text{証明終}}$

　この定理は極めて重要である。というのも、今まで行列式は列に関してのみ性質などを述べてきたが、この定理をそれらに適用することで、**列に関する性質を、行に関する性質に拡大できる**からである。以後、そういう視点で読み進められたい。

　ここでひとつ、重要な補題を示しておく。

補題 3.17

$$\begin{vmatrix} a & {}^t\boldsymbol{y} \\ \mathbf{0} & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & {}^t\mathbf{0} \\ \boldsymbol{y} & X \end{vmatrix} = a|X|$$

(proof)
転置しても行列式は変わらないので、片方だけ示せばよい。

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & {}^t\mathbf{0} \\ \boldsymbol{y} & X \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & {}^t\mathbf{0} \\ \boldsymbol{y} & X \end{vmatrix} \\ &= a|X| + \begin{vmatrix} 0 & {}^t\mathbf{0} \\ \boldsymbol{y} & X \end{vmatrix} \quad \because \text{補題 3.9} \\ &= a|X| + 0 \quad \because \text{補題 3.2 系 (列に関する性質は行についても成り立つ)} \end{aligned}$$

証明終

3.5 行列式の展開

目的の行もしくは列を交換によって一番前に持っていくことを考える。

補題 3.18

$$det(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = (-1)^{i+1} det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$

(proof)
帰納法による。i=1 のときは自明である。i=k のとき成り立つとして、i=k+1 のときを考える。仮定より

$$det(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = (-1)^{k+1} det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$

左辺の $\boldsymbol{a}_k$ と $\boldsymbol{a}_{k+1}$ を交換すると

$$(-1) det(\boldsymbol{a}_{k+1}, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = (-1)^{k+1} det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$

両辺に (-1) をかけて

$$det(\boldsymbol{a}_{k+1}, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = (-1)^{(k+1)+1} det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$

よってこの場合も成り立つ。

以上より示された。 証明終

当然これは行ベクトルについても成り立つ。これらを組み合わせて、(i,j) 成分を (1,1) に交換によって持ってくることを考える。

補題 3.18 系

$$det\begin{pmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \hline a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (-1)^{i+j} det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

これから示唆される、次の定義を置き、それを用いて、行列式を展開する。

定義 3.7 n 次正方行列 A から、i 行及び j 列を除いた *(n-1)* 次正方行列を第 *(i,j)* 小行列といい、その行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものを第 *(i,j)* 余因子といい、$|\mathbf{\tilde{A}_{ij}}|, \mathbf{det\tilde{A}_{ij}}$ と表す。

定理 3.19

$$detA = det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= a_{1j}|\tilde{A}_{1j}| + \cdots + a_{nj}|\tilde{A}_{nj}|$$

(proof)

$$detA = det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \vdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \because \text{多重線形性}$$

$$= (-1)^{1+j}\begin{pmatrix} a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \cdots + (-1)^{n+j}\begin{pmatrix} a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)n} \end{pmatrix} \because \text{補題 3.18 系}$$

$$= a_{1j}|\tilde{A}_{1j}| + \cdots + a_{nj}|\tilde{A}_{nj}| \because \text{補題 3.17}$$

$\boxed{\text{証明終}}$

3.6 余因子行列と逆行列

補題 3.20 $k \neq j$ のとき、

$$a_{1k}|\tilde{A}_{1j}| + \cdots + a_{nk}|\tilde{A}_{nj}| = 0$$

(proof)
$A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ であるとき、$det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \underline{\boldsymbol{a}_k}, \cdots, \underline{\boldsymbol{a}_k}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ を j 列について展開すると、

$$det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \underline{\boldsymbol{a}_k}, \cdots, \underline{\boldsymbol{a}_k}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = a_{1k}|\tilde{A}_{1j}| + \cdots + a_{nk}|\tilde{A}_{nj}|$$

となるが、重複を含むので $det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \underline{\boldsymbol{a}_k}, \cdots, \underline{\boldsymbol{a}_k}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = 0$ である。よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

$k = j$ のときは、通常の detA=$|A|$ の展開である。従って、次の補題が成り立つ。

補題 3.21

$$a_{1k}|\tilde{A}_{1j}| + \cdots + a_{nk}|\tilde{A}_{nj}| = \delta_{jk}|A|$$

これの示唆するところにより、以下の定義を置く。

定義 3.8 A の余因子行列 $\tilde{A}$ を、その *(i,j)* 成分=$|\tilde{A}_{ji}| = |{}^t\tilde{A}_{ij}|$ によって定義する。*(*転置に注意*)*

すると、ただちに次の定理が得られる。

定理 3.22 $\tilde{A}A = |A|E$

(proof)
成分で積を計算すれば、

$$\begin{aligned}(\tilde{A}A)_{ij} = (\tilde{A})_{ik}(A)_{kj} &= |\tilde{A}_{1i}|a_{j1} + \cdots + |\tilde{A}_{ni}|a_{jn} \\ &= a_{j1}|\tilde{A}_{1i}| + \cdots + a_{jn}|\tilde{A}_{ni}| \\ &= \delta_{ij}|A|\end{aligned}$$

となる。よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 3.22 系

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

3.7 クラメルの公式

連立方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を求めることを考える。A が正則でなかったら、解形を作ることによって解空間のベクトルを求めることができるが、ここでは、A が正則である場合を考える。

A が正則なので逆行列 A^{-1} が存在する。これを両辺に左からかければ、

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}\boldsymbol{b} \quad \because \text{定理 } 3.22 \text{ 系}$$

となる。この i 成分を調べると、

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{|A|}\{(\tilde{A})_{i1}b_1 + \cdots + (\tilde{A})_{in}b_n\} \\ &= \frac{1}{|A|}\{b_1|\tilde{A_{1i}}| + \cdots + b_n|\tilde{A_{ni}}|\} \\ &= \frac{det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)}{det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n)} \end{aligned}$$

と、求めることができる。これをクラメルの公式という。

3.8 差積と交代性に関する補足

交換によって整理を行うために、行列式においては**交代性**を導入したが、単に整理するということならば、**対称性 (交換については変化しない)** を導入した方が簡単そうである。それなのに、なぜ交代性を導入するのかというと、今まで見てきたように、そのほうが性質の良い関数になるからである。より直接的には、交代性の持つ、「重複を含むなら、値は 0 になる。」という性質が、対称性を導入した場合に比して、行列式を性質の良いものにしている。結局のところ、行列式と正則性の関係 (定理 3.14) はこの性質の現れであり、それが逆行列との関係にもつながってくるのである。

さて、交代性を論じるとき、偶置換・奇置換の存在について示すのに、**差積**$\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{x_1}, \cdots, \mathbf{x_n})$ を導入したが、これには、交代性を持つ具体的な式が必要だった、ということに加え、差積が交代性の根本となる式である、ということがある。具体的には、次の定理が成り立つ。

定理 3.23 n 変数多項式 $f(x_1, \cdots, x_n)$ が交代性を持つとき、

$$f(x_1, \cdots, x_n) = g(x_1, \cdots, x_n)\Delta(x_1, \cdots, x_n) \quad (g \text{ は対称性を持つ})$$

の形で表される。

(proof)

剰余定理を繰り返し用いる。x_i の多項式と見たときに、交代性より $x_i =$

$x_1, \cdots (i$ を除く$), x_n$ が $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$ の解になる。従って、剰余定理より、$f = (x_i - x_n) \cdots (x_i - x_1) Q_i(x)$ の形になるとわかる。これを $i = 1, \cdots, n$ について行うと、

$$f(x_1, \cdots, x_n) = g(x_1, \cdots, x_n) \Delta(x_1, \cdots, x_n)$$

の形になるとわかる。ここで、変数を交換した多項式をそれぞれ f', g', Δ' とすると、f と差積の交代性より、$f' = -f, \Delta' = -\Delta$ となる。従って、

$$f' = g' \Delta' : \quad -f = g'(-\Delta) : \quad g' = \frac{f}{\Delta} = \frac{g\Delta}{\Delta} = g$$

であり、g は対称性を持つ。 $\boxed{\text{証明終}}$

この事実を用いて、有名な行列式を計算する。

定理 3.24 *(ヴァンデルモンドの行列式)*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \Delta(x_1, \cdots, x_n)$$

(proof)

行列式は $x_1, \cdots, x_n$ の多項式である。これを $f(x_1, \cdots, x_n)$ と置くと、これは明らかに交代性を持っている。よって定理 3.23 より、

$$f(x_1, \cdots, x_n) = g(x_1, \cdots, x_n) \Delta(x_1, \cdots, x_n) \quad (g \text{ は対称性を持つ})$$

の形で表される。次に、次数を考える。f については、各 x_i につき、その列で行列式を展開すればわかるように、次数は (n-1) である。一方、差積 Δ についても、各 x_i の次数は (n-1) である。従って、g は定数でなくてはならない。そこで、$x_n^{n-1} x_{n-13}^{n-22} x_2 1$ の係数を考える。行列式については、対角成分を順に展開して係数が 1 だとわかる。差積については、$\prod_{i<j}(x_j - x_i)$ の左側 (x_j) を順にかけていけばいいので、これも係数は 1 である。つまり g=1 である。よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

4 線形空間と基底及び次元

4.1 線形空間と線形独立

定義 4.1 集合 Vが、その集合の任意の要素 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ について、和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ と複素数 c 倍 $\boldsymbol{cx}, \boldsymbol{cy}$ (その満たすべき性質の詳細は他の資料をあたられたい) が定義でき、それらのすべてがまた Vに含まれる $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V} : \boldsymbol{cx}, \boldsymbol{cy} \in \boldsymbol{V})$ とき、集合 Vを**線形空間**という。また、線形空間の要素を**ベクトル**という。

*高校で扱ったようないわゆるベクトルだけを表しているのではない。

定義 4.2 線形空間上のベクトル $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_k}$ について、

$$\boldsymbol{c_1 a_1} + \cdots + \boldsymbol{c_k a_k}$$

を、$\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_k}$ の線形結合という。また、

$$\boldsymbol{c_1 a_1} + \cdots + \boldsymbol{c_k a_k} = \boldsymbol{0}$$

を**線形関係**といい、これに、自明な解 (つまり $\boldsymbol{c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0}$) 以外の解が**無い**場合、$\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_k}$ は**線形独立**であるといい、そうでない場合を**線形従属**であるという。

定理 4.1 あるベクトル $\boldsymbol{x}$が、線形独立なベクトル $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_k}$ の線形結合として表されるとき、その表し方 (つまり係数 $\boldsymbol{c_1}, \ldots, \boldsymbol{c_k}$) は一意的である。

(proof)

$$x = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = c'_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c'_k\boldsymbol{a}_k$$

と表されるとする。これを変形すると、

$$(c_1 - c'_1)\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (c_k - c'_k)\boldsymbol{a}_k = 0$$

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ は、線形独立なので、定義より、その係数はすべて 0 でなくてはならない。

$$\therefore c_1 = c'_1, \ldots, c_k = c'_k$$

よって、示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 4.2 ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が線形従属 $\leftrightarrow$ $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の中に、他の線形結合として表せるものがある

(proof)
(i)$\boldsymbol{a}_i (i = 1, \ldots, k)$ が線形従属であるとき

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = 0$$

に、自明な解以外の解がある。つまり、$c_i \neq 0$ となる i がひとつは存在する。

$$\therefore \boldsymbol{a}_i = \frac{c_1}{c_i}\boldsymbol{a}_a + \ldots_{\text{（i は除く）}} + \frac{c_k}{c_i}\boldsymbol{a}_k$$

確かに、$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の中に、 他の線形結合として表せるものがある。

(ii)$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の中に、 他の線形結合として表せるものがあるとき
それを $\boldsymbol{a}_i$ とすると

$$\boldsymbol{a}_i = c_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots_{\text{（i は除く）}} + c_k\boldsymbol{a}_k$$

と表せる。これを変形すると、

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (-1)\boldsymbol{a}_i + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = 0$$

となり、線形関係に自明な解以外の解があることになるので、$\boldsymbol{a}_i (i = 1, \ldots, k)$ は線形従属である。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 4.2 系 ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が線形独立 $\leftrightarrow$ どの $\boldsymbol{a}_i (i = 1, \ldots, k)$ も他の線形結合として表せない

ベクトルの集合に、ベクトルを増やすと、それがもとの集合によって表される可能性があり、線形従属性が高まる。確かに、線形従属なベクトルの集合にベクトルを増やすと、それらは必ず線形従属である。

逆に減らすと、他のベクトルによって表されるものが除かれることになり得るので、線形独立性が高まる。確かに、線形独立なベクトルの集合からベクトルを減らすと、それらは必ず線形独立である。

4.2　基底

定義 4.3 Vのベクトル$\boldsymbol{e_1,\ldots,e_n}$が、線形独立で、かつ、$V$の任意のベクトルをその線形結合で表せるとき、$\boldsymbol{< e_1,\ldots,e_n >}$を Vの**基底**という。

定理 4.1 系 あるベクトル$\boldsymbol{x}$が、基底$\boldsymbol{< e_1,\ldots,e_n >}$の線形結合として表されるとき、その表し方は一意的である。

基底が、V の任意のベクトルを線形結合で表せることは、定理 4.2 により、基底に任意の V の要素を足した集合が、必ず線形従属になることを表している。基底自体は線形独立であるから、基底の要素数は、その線形空間上で線形独立なベクトルの限界になりそうである。しかし、基底の要素数が一定であるかどうかという肝心なことが、まだ明確ではないので、まずはそれを見てみることにする。

定理 4.3 線形空間が、二つの基底$\boldsymbol{< e_1,\ldots,e_n >,< f_1,\ldots,f_m >}$を持つとき、その要素数 n,m は等しい。

(proof)

$f_i(i=1,\ldots,m)$ も同じ線形空間のベクトルなので、$< e_1,\ldots,e_n >$ の線形結合で表せる。つまり、

$$f_j=\sum_{i=1}^{n} t_{ij}e_i \tag{1}$$

と表すとする。ここで、$< f_1,\ldots,f_m >$ についての線形関係を書くと、

$$\sum_{j=1}^{m} c_j f_j = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_j\left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij}e_i\right)=0 \qquad \because \text{式 (1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} c_j t_{ij}\right)e_i=0$$

というように、$< e_1,\ldots,e_n >$ の線形関係に帰着できる。$< e_1,\ldots,e_n >$ が線形独立なので、係数は 0。つまり

$$\sum_{j=1}^{m} t_{ij}c_j=0$$

である。これは行列と縦ベクトルの積として、

$$\begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \ldots & t_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}=0$$

と書ける。$A = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{nm} \end{pmatrix}$ とすれば、定理 2.5 より、行基本変形 P と列の交換 Q のみによって、

$$PAQ = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \text{X} \\ & & 1 & \\ \hline & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{array}\right)$$

となるとき、

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{cases} \mathbf{0} & rankA = m \text{ のとき} \\ Q \begin{pmatrix} \text{-X} \\ \text{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{rankA+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (a_{rankA+1}, \cdots, a_n \text{は任意}) & rankA < m \text{ のとき} \end{cases}$$

である。

$< f_1, \dots, f_m >$ は基底なので、その線形関係 (2) は自明な解のみを持つことにならなければならない。つまり、$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ でなければならない。よって rankA=m でなくてはならない。階数が、行の数を超えることは無いので、$rankA \leq n$ である。つまり、$\mathbf{m} \leq \mathbf{n}$ が成立する。

今の議論は、$< e_1, \dots, e_n >$ と $< f_1, \dots, f_m >$ を逆転させても成り立ち、その結果は $\mathbf{m} \geq \mathbf{n}$ となる。二つの結果をあわせると $\mathbf{n} = \mathbf{m}$ となり、同じ線形空間の基底の要素数は等しいことが示せた。 証明終

4.3 次元

定義 4.4 線形空間 V の基底の個数を**次元**といい、$\boldsymbol{dimV}$ で表す。前定理 *4.3* により、次元は、線形空間ごとに固有な値として定めることが出来る。

無限次元の線形空間も重要だが、それは後で扱うとして、**しばらくは有限次元の場合のみを扱う**。その上で、まず、便利な補題を用意しておく。

補題 4.4 *有限次元であれば、任意の線形独立なベクトル $\boldsymbol{a_1, \dots, a_k}$ を拡大して (つまり、それにいくつかの適当なベクトルを付加することで) 基底を作ることができる。*

(proof)

V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ について、$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a_1, \ldots, a_k}$ の線形結合として表されるとき (つまり、$\boldsymbol{x, a_1, \ldots, a_k}$ が線形従属であるとき) は、特に何もする必要が無い。$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a_1, \ldots, a_k}$ の線形結合として表されないとき (つまり、$\boldsymbol{x, a_1, \ldots, a_k}$ が線形独立であるとき) は、$\boldsymbol{a_1, \ldots, a_k}$ に $\boldsymbol{x}$ を付加して、新たにベクトル群 $\boldsymbol{x, a_1, \ldots, a_k}$ をつくる。

この操作を $\boldsymbol{x}$ が線形空間全体にわたるまで行えば、新たに作られた有限のベクトル群 $\boldsymbol{a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_n}$ は、線形独立であり、かつ、線形空間のすべてのベクトルをその線形結合として表すことが出来ることになり、これはまさに基底である。 証明終

定理 4.5 次元個の線形独立なベクトルを集めると、基底になる。

(proof)

線形空間 V の次元 $\boldsymbol{divV = n}$ 個の線形独立なベクトル $\boldsymbol{a_1, \ldots, a_n}$ をとる。もし、この線形結合として表せない V のベクトルがあったとすれば、それを追加し、さらにいくつか (0 かもしれない) のベクトルを付加すれば、補題 4.4 より、$\boldsymbol{a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+\delta n}}$ は、V の基底となる。しかし、次元の定義より、基底の数は必ず $\boldsymbol{n}$ 個なので、これは矛盾する。従って、$\boldsymbol{a_1, \ldots, a_n}$ の線形結合として任意の V のベクトルを表すことが出来る。また、これは、線形独立なので、基底である。 証明終

前に少し触れたことを、述べておこう。

定理 4.6 次元は、線形独立にとれるベクトルの最大数である。

(proof)

線形空間 V の $\boldsymbol{N}$ 個の線形独立なベクトル $\boldsymbol{a_1, \ldots, a_N}$ をとる。$\boldsymbol{N > dimV}$ だとすると、$\boldsymbol{a_1, \ldots, a_N}$ からいくつか取り除いた $\boldsymbol{a_1, \ldots, a_{dimV}}$ は、線形独立なので、定理 4.5 より、基底となる。よって、$\boldsymbol{a_i (i > dimV)}$ は $\boldsymbol{a_1, \ldots, a_{dimV}}$ で表せるということになり、$\boldsymbol{a_1, \ldots, a_N}$ が線形独立であるということに矛盾する。従って、$\boldsymbol{N \leq dimV}$ である。 証明終

Tea Break:バルカン古代中世史

古代のバルカンといえば、やはりギリシャが話題の中心となろう。アテネやスパルタ・テーベなどのポリスが栄えた。ポリス社会が没落すると、北方のマケドニアが、フィリッポス二世のもと力をつけ、ギリシャを制覇した。その子、アレクサンドロス大王の時代には、ペルシアを降し、インダス川に至るまでの領域を制した。

その後紆余曲折を経て、BC146 年にはギリシャが、アウグストゥスの治世が終るまでには、バルカンの大部分がローマの支配下に置かれた。このとき未だ、ローマの版図に入っていなかったのが、ダキア (ルーマニア) であった。BC70 年、部族連合の首長ブレビスタが、ダキアの統一に成功していた。しかし、五賢帝の一人、トラヤヌスによって、 ここもローマの征服するところとなり、バルカンはほぼ全土がローマの支配下に入った。

やがて、時がたつと、帝国の中心が東方に移ってきた。四分統治・専制君主政治を始めたディオクレティアヌス帝は、バルカンの出身である。やがて、ローマ帝国が東西に分裂する。そして、

これ以降のバルカンの歴史は、東ローマ帝国 (ビザンツ帝国) と民族大移動でバルカンに来た諸民族との関わり合いの中で展開されていくことになる。

中世のバルカンは、そのビザンツ帝国の影響を強く受けた。ユスティニアヌス帝の時代には、全バルカンどころか、地中海周辺のほぼ全域を支配したが、その後領土は縮小していく、初期のビザンツ帝国はまだローマ的性格を持っていたが次第に、ギリシャ的・東方的性格を強める。

9 世紀後半には、アジア系のブルガール人がスラブ人を破って打ち立てた、第一次ブルガリア帝国が栄えた。893 年に即位した、シメオン一世は、コンスタンティノープルに留学した経験があり、ビザンツ帝国を熟知していた。シメオンはビザンツ帝国と戦って勝利し、フランク王国に並ぶほどの大勢力となった。このころには、ブルガール人はスラブ人と同化していた。913 年にはブルガリア皇帝を自称した。その後継者ペダル一世は、ビザンツ帝国より、皇帝の称号を認められ、ブルガリア大主教座は総主教座に昇格したが、内紛により次第に国は傾き始めた。ブルガリアはビザンツ帝国の攻撃を受けるようになり、1014 年には「ブルガリア人殺し」の異名をとるバシレイオス 2 世の徹底かつ苛烈な攻撃を受け、第一次ブルガリア帝国は滅亡する。バシレイオス二世の下、ビザンツ帝国は強勢を誇ったが、帝国の根幹を支える自由農民の没落と大土地所有の発展で、次第に衰えていく。

1168 年には、現在のセルビア南西部であるラシュカ地方をステファン・ネマーニャが統一し、ビザンツ帝国の内紛に乗じてセルビア王国を打ち立てた。

一方、ビザンツの厳しい統治下におかれていたブルガリアであったが、1185 年には、特別税の課税を契機に叛乱が勃発、クマン人やヴラフの支援を受け、衰えつつあったビザンツ帝国を破り、独立を回復、クマン人貴族のアセンが皇帝に即位し、第二次ブルガリア帝国が成立した。1218 年に即位した、イヴァン・アセンのもと、貨幣を鋳造し、最大の領土を保持、第二次ブルガリア帝国は最盛期を迎えた。しかし、その死後はハンガリーやモンゴルのバトゥーの打ち立てたキプチャク・ハン国の攻撃を受けて衰退した。

セルビア王国の方は、1217 年に、始祖ネマーニャの第二子「初代戴冠王」ステファンがローマ教皇より戴冠を受けた。一方、セルビアは東方正教会とも関係を深め、ステファンの末の弟サヴァが東方正教会総主教座より大主教に任じられた。1331 年に即位したドゥシャン王は、ブルガリアやハンガリーと友好関係を築きつつ、マケドニアの一部・アルバニア・ギリシャ中部まで支配した上、セルビア大主教座を総主教座に昇格させ、「セルビアとギリシャ人の皇帝」として戴冠し、セルビア王国の最盛期を現出した。「ドゥシャン法典」の制定など、内政にも努めたが、その死後には、セルビアは内紛で分裂していった。

クロアチアは、ローマ帝国分裂時の西ローマ帝国の領域にあたり、むしろ西欧の影響を強く受けた。ユスティニアヌスの支配・フランク王国の支配を受けたが、それを脱した後は、再びビザンツ帝国が勢力を広げようと画策した。ビザンツ帝国への対抗のため、クロアチアはカトリック教会との関係を深めた。結局ビザンツ帝国は衰退していくが、国内は、カトリック教会を代表するスプリトの教会と、カトリック教会によって禁止されたスラブ語典礼を行うクロアチア教会を代表するニンの教会の確執が起こった。924 年、ニンの部族長トミスラヴがフランク王国とハンガリーを破って全クロアチアを制圧し、クロアチア王を称した。しかし、1102 年には内紛が起こり、それに乗じたハンガリー王がクロアチア王を兼ねることとなり、ハンガリーのもとで自治を行うという立場におかれた。オーストリアのハプスブルク家がハンガリーを支配すると、今度はハプスブルク家との間で同様の協定を結んだ。

ボスニアは、他国が交互に支配していたが、12 世紀後半に中世ボスニア王国が建国されるに及んで、ボスニア人意識が生まれてきた。14 世紀のコトロマニッチの治世にヘツツェゴヴィナを支配下に置き、衰退中のセルビアに変わってバルカン最強となったが、内紛でこれもまた衰えていった。

ルーマニアに関しては、ちりじりになったダキア・ローマ人がヴラフと呼ばれるようになり、彼らが、14 世紀ごろ、いずれもハンガリー王の軍を破り、ワラキア公国とモルドヴァ公国を建国した。

1299 年にはオスマンが国家を打ち立てた。このオスマン帝国は、小アジアを次々制圧し、1361 年にはムラト一世がアドリアノープルに遷都し、ここを拠点にバルカン征服を始めた。

1371 年、マリツァ河畔の戦いでセルビア王国はオスマン帝国に破れ、中世セルビア王国は事実上崩壊した。分裂したセルビアで頭角を現したラザル公は、ムラト一世の進出を二度にわたって退けていた。1389 年に起こったコソヴォの戦いで、ムラト一世はラザル公の従士オビリッチに殺害されるが、その子バヤズィト一世が素早く軍勢を整え、ラザル公を捕らえ処刑した。このラザル公の敗戦は、英雄叙事詩とともにセルビア人の間で神話化され、近代セルビアでナショナリズムの基礎となっていく。また、これによりセルビアはオスマン帝国の属国となった。1459 年には、スメデレヴォ要塞が陥落して直轄領となった。

バヤズィト一世は、1395 年、ワラキアに侵攻する。ワラキア老公ミルチャは、武器を以て抵抗したが、味方の貴族が離反し、トランシルヴァニアへ逃亡する。オスマン帝国はミルチャのライバル・ヴラド一世をワラキア公に任じ、貢納させた。

バヤズィト一世は、翌 1396 年、ニコポリスの戦いにおいて、ハンガリー王ジギスムントの率いる西欧十字軍を撃破した。しかし、小アジアへ侵攻してきたティムールに、 1402 年、アンカラの戦いで破れ、捕虜となり、そのまま死んだ。オスマン帝国はここで一度断絶する。しかし、

1405 年には明への遠征の途中ティムールが病死し、1413 年、メフメト一世がオスマン帝国を復活させる。

一方逃亡したミルチャ老公は体勢を立て直して、ヴラド一世の軍と戦い、公位を奪還。ハンガリーと同盟してオスマン帝国の攻撃をしのいだが、1415 年には、完全な自治と引き換えに、貢納を認めた。

1444 年に即位したメフメト二世は、「永遠の都」コンスタンティノープル攻略のため 1453 年、軍を差し向けた。すでにビザンツ”帝国”の領土はコンスタンティノープル周辺だけになっていたが、その守りがあまりに堅固なため、攻略は困難を極めた。艦隊を山越えで移動させるという奇策により、後背である湾内に侵入し、激しい抵抗を押さえ、ついにこれを陥落させた。

一方ワラキアのほうでは、ミルチャ老公の死後、トランシルヴァニアとハンガリーを治めるフニャディが、オスマン帝国への抵抗を行った。コンスタンティノープル陥落 3 年後の 1456 年には、ベオグラードの戦いでオスマン帝国軍を勝利し、その進出を食い止めた。

フニャディの死後は、同年にワラキア公となった、ヴラド串刺公・ドラクールが反オスマンの旗手となった。彼は、吸血鬼ドラキュラのモデルでもあり、「串刺公」の異名は、法律の違反者に串刺しの刑を適用することが多かったことにより名づけられた。オスマン帝国への貢納を拒否したヴラド串刺公は、メフメト二世の軍と戦うが、裏切りにあってトランシルヴァニアへ亡命、12 年間幽閉生活を送った後、ワラキア公に復帰したが、不慮の死を遂げた。それと同時に、ワラキアはオスマン帝国の属国となった。

モルドヴァ公国では、シュテファン大公がオスマン帝国に抵抗し、1475 年のヴァスルイの戦いで勝利して、ローマ教皇から「キリスト教の闘士」とたたえられたが、オスマン帝国も、タタールハン国を属国にして圧力をかけ、1479 年にはヴェネツィアと和睦したため、孤立を深めたモルドヴァはついに貢納国となった。1538 年には属国となる。

トランシルヴァニアに関しては、ハンガリーとオスマン帝国が覇を競ったが、1526 年のモハーチの戦いの敗北で、スレイマン一世のオスマン帝国がハンガリーともどもこれを属国とした。スレイマン一世は三年後には第一次ウィーン包囲を行い、スペイン王でもあるハプスブルク家の神聖ローマ皇帝カール五世を圧迫した。さらに、ダルマツィアを除くクロアチアも支配下に置いた。1538 年にはプレヴェザの海戦に勝利して、ヴェネツィアに代わり地中海を制覇した。この時代が、オスマン帝国の最盛期だった。

1571 年にはレパントの海戦で、スペイン無敵艦隊と教皇・ヴェネツィアの連合艦隊に破れた。1683 年には第二次ウィーン包囲に失敗、トランシルヴァニアの支配を事実上失い、1699 年のカルロヴィッツ条約で、正式にハプスブルク帝国にトランシルヴァニアを割譲した。こうして、オスマン帝国の拡大は停止した。

クロアチアに近いハプスブルク帝国の国境地帯付近は、軍政国境地帯として、帝国の直轄地となっていた。ハプスブルク家の呼びかけにより、17 世紀から 18 世紀にかけて、ここに、コソヴォのセルビア人が免税特権と自治権を持つ国境警備兵となるべく、「大移住 (ヴェリカ・セオバ)」した。のちのクロアチア内戦の原因ともなった出来事であった。

さて、オスマン帝国が領土を広げる過程では、激しい抵抗が起こったが、実際支配下に置かれてからは、バルカンでは 1804 年のセルビア蜂起まで、大きな反オスマンの叛乱は起こっていない。これは、オスマン帝国の巧みな統治によるものであった。オスマン帝国のシステムそのものは、スルタンを頂点に中央集権的に出来ていたが、他民族を支配するにおいては、その伝統・社会を完全に破壊するより、それをある程度尊重した上に、オスマン帝国のシステムをラップした。イスラム教徒優位には違いなかったが、統治には、様々な民族出身の人々があたった。オスマン帝国は、宗教共同体ミッレト別に住民を組織し、信仰の自由とミッレト内部の自治を認める政策も行った。実質化したのは 18 世紀以降といわれているが、これは、反発を抑え徴税を円滑にするシステムでもあった。

軍の中核を担ったのは、スルタン直属の奴隷軍団イエニチェリであった。このイエニチェリや中央官僚の人材登用には、デウシルメ制が 18 世紀ごろまで用いられた。これは、バルカン半島の利発で健康なキリスト教徒の少年を、イスタンブールで改宗させ、教育し、スルタン直属の奴隷として登用するというものであった。親からすれば、血税であったが、実際に連れて行かれる少年たちにしてみれば、出世への唯一の道でもあった。スルタンのもと政治を行う大宰相は、ほとんどがこれによって登用されたバルカン人であったように、デウシルメ制によって、微賤の農民の子でも、大宰相や軍団長になることが出来た。これは、オスマン帝国の中央集権を支えるシステムだった。貴族の子よりも、微賤の子から登用すれば、他に頼るべき力も存在せず、スルタンへの忠誠心が高いといえる。

軍事のもう一翼と、地方統治の役割を担ったのが、ティマール制である。これは、スィパーヒーと呼ばれる者たちに、一代限りの軍事封土を与え、そこから税金を徴収させ、またその住民を保護させ、有事の際には出征を義務付けるという制度であった。

しかし、これは領土の拡大無しには成り立たない制度であった。スレイマンより後、帝国の領土は漸減傾向を呈し、 ティマール制が崩れ始める。イエニチェリも軍紀が乱れ、統制がきかなくなるなど、衰退の傾向が、内部からも現れてくるようになるのである。

参考文献: 図説バルカンの歴史 柴宣弘 河出書房新社 詳説世界史研究 山川出版社

5　計量線形空間　-内積の導入-

5.1　内積の定義

定義 5.1 線形空間 V の 2 元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し、内積という複素数を、以下の性質を満たすよう定め、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ **や** $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ で表す。

1. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_2}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y_1}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y_2})$
2. $(\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y}) = c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
3. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$
4. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{0}$　**(等号となるのは** $x = 0$ **の時のみ)**

式 *4.* について、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ が実数であることは、式 *3.* から示せる。
内積を持つ線形空間を**計量線形空間**という。

(注) 内積の定義には二種類の流儀があり、もうひとつの流儀とは、*2.* の式を $(c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ と定義するものである。

定理 5.1 内積は、以下の性質を満たす。

1. $(\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y})$
2. $(c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{c}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
3. $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$

(proof)
式 1. 2. については、内積の定義式の 1.2. について複素共役を取って 3. を用いる。式 3. については、内積の定義式の 2. について c=0 とし、さらに 3. を用いればよい。 $\boxed{\text{証明終}}$

5.2　直交

定義 5.2 計量線形空間 V の 2 元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積が 0 であるとき、**直交**するという。

直交は、線形独立をより強くした概念といえる。それを示すのが次の定理である。

定理 5.2 ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ について、それらの異なる二元がすべて直交するなら、線形独立である。

(proof)
線形関係
$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = 0 \tag{3}$$
について、$\boldsymbol{a}_i(i = 1, \cdots, n)$ との内積をとれば、

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}_i, c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n) &= (\boldsymbol{a}_i, 0) \\
c_1(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_1) + \cdots + c_n(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_n) &= 0 \\
c_i(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i) &= 0 \qquad \because \text{異なる二元はすべて直交する}
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}_i$は 0 ベクトルではないので、$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i) \neq 0$ である。故に、

$$c_i = 0 \quad (i = 1, \cdots, n)$$

であり、線形関係 (3) は、自明な解しか持たないので、$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は線形独立である。 証明終

5.3 ノルム

定義 5.3 計量線形空間上のベクトル $\boldsymbol{x}$ について、ノルム $\|\boldsymbol{x}\|$ を、

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

と定める。

内積の 4. の性質が、内積とノルムを雄弁にする。

定理 5.3 $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ *(シュヴァルツの不等式)*

(proof)
$\|\boldsymbol{y}\|^2\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{y}$ のノルムが正であることを用いる。

$$\begin{aligned}
0 &\leq (\|\boldsymbol{y}\|\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{y}, \|\boldsymbol{y}\|\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{y}) \\
&= \|\boldsymbol{y}\|^4\|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \|\boldsymbol{y}\|^2\overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\|\boldsymbol{y}\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{y}\|^2(\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2)
\end{aligned}$$

故に、

$$\begin{aligned}
|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2 &\leq (\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|)^2 \\
|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| &\leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|
\end{aligned}$$

証明終

定理 5.4 $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$ *(三角不等式)*

(proof)
二乗して

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \\
&= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2+2Re((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))+\|\boldsymbol{y}\|^2 \\
&\leq \|\boldsymbol{x}\|^2+2|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|+\|\boldsymbol{y}\|^2 \\
&\leq \|\boldsymbol{x}\|^2+2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{y}\|^2 \quad \because \text{シュヴァルツの不等式} \\
&= (\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|)^2
\end{aligned}$$

この正の平方根をとればよい。 $\boxed{\text{証明終}}$

定義 5.4 集合 X の二元 *a,b* に対し、実数を与える写像 d が以下の条件を満たすとき、d を距離関数といい、距離関数を備えた集合 *(X,d)* を**距離空間**という。

1. $\boldsymbol{d(a,a)=0 \quad x \neq y}$ **なら** $\boldsymbol{d(x,y) \leq 0}$

2. $\boldsymbol{d(a,b)=d(b,a)}$

3. $\boldsymbol{d(a,c) \leq d(a,b)+d(b,c)}$ *(三角不等式)*

計量線形空間 V の二元 a,b に対し、関数 d を $\mathbf{d}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = ||\mathbf{a}-\mathbf{b}||$ により定めると、d は距離関数であり、**集合 (V,d) は距離空間である**。

5.4 正規直交基底

定義 5.5 計量線形空間のベクトルの集合において、異なる二つのベクトルがすべて直交し、かつ、どのベクトルもノルムが *1* であるとき、その集合を正規直交系といい、基底が正規直交系であるとき、これを**正規直交基底**という。

$< \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n >$ が正規直交基底なら、$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ (クロネッカーのデルタ) となる。これが、正規直交基底が便利である所以である。

任意のベクトルを、線形独立なベクトルの線形結合として表す時、その係数は一意的に決まる (定理 4.1) が、正規直交系で表す場合には、その係数も内積によって与えられる。そのことについて述べたのが、次の定理である。

定理 5.5 計量線形空間のベクトルを$\boldsymbol{x}$が、その正規直交系$< \boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_k} >$の線形結合で表せたとすると、

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{e_1} + \cdots + (\boldsymbol{e_k}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{e_k}$$

(proof)
条件より、$\boldsymbol{x}$ を以下のように表せる。

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{e}_k$$

このとき、

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{e}_i, c_1\boldsymbol{e}_1) + \cdots + (\boldsymbol{e}_i, c_k\boldsymbol{e}_k) = c_1(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_1) + \cdots + c_k(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k) = c_i$$

となる。これを上の式に代入すればよい。 証明終

正規直交系 $< \boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_k} >$ の線形結合によってベクトル、

$$\boldsymbol{a'} = \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{e_1} - (\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{e_2} - \cdots - (\boldsymbol{e_k}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{e_k}$$

とおく。$\boldsymbol{a'} = \boldsymbol{0}$ と仮定すると、$< \boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_k} >$ の線形結合によって表せたことになるので、$\boldsymbol{a'} \neq \boldsymbol{0} \quad \|\boldsymbol{a'}\| \neq \boldsymbol{0}$ である。また、$< \boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_k} >$ が正規直交系であることより、

$$(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{a'}) = (\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_i}) = (\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$$

となって、$\boldsymbol{a'}$ が $< \boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_k} >$ のどれとも直交することがわかる。

以上より $\boldsymbol{e_{k+1}} = \frac{\boldsymbol{a'}}{\|\boldsymbol{a'}\|}$ とすれば、$< \boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_k}, \boldsymbol{e_{k+1}} >$ が正規直交系となる。この操作を**シュミットの直交化法**という。これを用いれば、任意の基底から正規直交基底を作ることができ、また、正規直交系 (当然線形独立) を拡大して基底を作る時も (**補題 4.4** 参照)、新たに加えるべきベクトルにシュミットの直交化法を用いれば、正規直交基底をつくることができる。以上のことを、次に、定理としてまとめておく。

定理 5.6 *0*次元でない線形空間には、必ず正規直交基底が存在する。また、正規直交系を拡大して正規直交基底を作ることができる。

Tea Break:バルカン近代史

成長から停滞へ、スレイマン一世を境にオスマン帝国の変質が始まった。領土拡大の停止と、新大陸から大量の銀が流入した「価格革命」によって、ティマール制は事実上解体され、代わりに、徴税請負制 (イルティザーム) が実施され、土地の私有が広まった。これにより、富める者はさらに富み、アーヤーンと呼ばれる地方地主が台頭し、自らの所領を事実上独立して統治するものも現れた。ハプスブルク帝国との戦い、イランのサファヴィー朝との戦い、そして、南下し

てくるロシア帝国との戦いと、慢性的な戦争により、軍事的な負担が強まり、その結果収奪が強化され、さらにオスマン帝国の内政は苦しくなってきた。

そんな中、1804 年、バルカン初の反オスマン叛乱である、第一次セルビア蜂起が起きた。これは、軍紀が乱れ、既にスルタンの統制を受けないようになっていた、イエニチェリによる収奪への反発から始まっており、最初は通常の秩序を回復するようスルタンに求める目的であったが、ちょうどナポレオンが皇帝になったくらいであり、ナショナリズムの高揚から、次第に反オスマンの叛乱へと変化していった。豚商人カラジョルジェを指導者とし、ロシアの支持を受け、独立を達成しようとしたが、ロシアがオスマン帝国と休戦したため、孤立し、1413 年にはオスマン帝国の大規模な反撃で鎮圧された。オスマン帝国は、報復を行ったが、これに対し 1415 年には再び叛乱が起こった。(第二次セルビア蜂起) ナポレオン戦争は既に終結し、ロシアがバルカンに対して手を回しやすい状況にあったので、この圧力を利用して、蜂起の指導者豚商人ミロシュは、独立にこだわらず、自治の獲得を目指した。1817 年には、制限つきだが自治権を獲得し、ミロシュは公となった。1830 年には、交渉の結果、公国としての完全な自治権を得た。

ギリシャでは、本土の蜂起より前に、在外のギリシャ人が、エテリア蜂起を起こした。これは、バルカンの開放を目指し、ロシア帝国陸軍少将で、皇帝の副官もしていた、イプシランディスが指導者として、まず、モルドヴァのアーヤーンであるアリー・パシャを打倒しようとしたが、計画は挫折し、1821 年までにこれは鎮圧された。しかしこれとは、独立に同じ 1821 年にギリシャ本土で一斉蜂起が起こり、ギリシャ独立戦争が始まった。同年 12 月に国民会議が開催され、政府が作られたが、土着のクレフティス (匪賊) 出身のコロコトニスが政府の主導権を握ったことに対し、外来の知識人やフィナリオティスは (イスタンブールにいた金融を生業とするギリシャ人) 反発し、両者の内戦が起こった。これは外来勢力側がイギリスの支援を取り付けて、勝利した。オスマン帝国は軍を派遣しようとしたが、海軍力で劣っており、なかなか実現できずにいた。

この時、エジプトでは、オスマン帝国によって派遣されていたアルバニアの傭兵隊長ムハンマド・アリーが、エジプト総督となり、オスマン帝国もこれを追認していた。富国強兵策をとり、スルタンの命を受けてワッハーブ朝を征服し、さらに、スーダンをも征服した。そして、ギリシャ独立戦争に手を焼いていたオスマン帝国の要請を受け、ムハンマド・アリーはその海軍をギリシャへ差し向け、要衝を次々陥落させ、アテネも占領した。詩人バイロンが義勇軍として上陸し、戦争に参加しないうちに死亡したのもこのあたりである。窮地に陥ったギリシャは西欧列強の支援を要請することにした。1827 年にはオスマン帝国とエジプトの連合艦隊が、英仏露の連合艦隊にナヴァリノの海戦で敗北し、さらにロシアが単独でオスマン帝国と戦って勝利し、1829 年、アドリアノープル条約が結ばれ、ギリシャの独立が正式に承認された。しかし、大統領が暗殺されるなどしたため、英仏露とバイエルン間の条約により、1833 年バイエルン公の息子オットー (オトン) を王とする、ギリシャ王国が成立することとなった。

ワラキア公国とモルドヴァ公国は、イスタンブールのギリシャ人金融業者であるフィナリオティスが事実上支配していた。先に述べた、エテリア蜂起のとき、農民たちも蜂起を行ったが、ロシアの支援を受けられず、エテリア蜂起軍とも対立してまもなく鎮圧されたが、これでフィナリオティスの支配も終焉した。しかし、ギリシャ独立戦争の過程で、この両国はロシアの占領下に置かれ、その保護国となった。その後の過程で、この両国はルーマニアとしてのアイデンティティを強めていく。

南下政策を採るロシアは、パレスチナの管理権問題から、オスマン帝国と開戦し、クリミア戦争が始まった。この時、オスマン帝国はロシアの南下に警戒感を強めていた英仏に支援を求めた。英仏は積極的に参戦し、ロシアは敗北、結果結ばれた 1856 年のパリ条約でワラキアとモルドヴァが連合王国として事実上独立し、ルーマニアの基礎が固められる。また、この時セルビアの自治も国際的に承認された。

1875 年、ボスニア・ヘルツェゴヴィナで反オスマン叛乱が起き、ブルガリアにも飛び火した。オスマン帝国は鎮圧を図ったが、セルビアとモンテネグロその領有を主張してオスマン帝国に宣戦布告し、正教徒保護を名目にロシアも参戦して、露土戦争が始まった。オスマン帝国はイギリスに支援を要請した。ロシアはイギリスとの戦争を避けるため、サン・ステファノ条約を結び休戦したが、イギリスとハプスブルク帝国が反発したため、「誠実な仲介人」を自称するドイツのビスマルクが 1878 年ベルリン会議を主催した。これにより、セルビア王国・ルーマニア王国モンテネグロ王国の独立とブルガリア公国の成立が正式に承認された。ボスニア・ヘルツェゴビナについてはハプスブルク帝国が領有することとなった。

一方クロアチアは、ハプスブルク帝国の支配が続いていた。正確には、ハンガリーがクロアチアを支配し、そのハンガリーをオーストリアハプスブルク帝国が支配していた。しかし、オーストリアがプロイセンに敗北したことにより、1867 年、アウグスライヒ (妥協) が成立し、オーストリアとハンガリーは同君連合の二重帝国となった。クロアチアはハンガリーの支配下に置かれ、ナゴドバ (協約) を結んでハンガリーの任命する総督のもと制限付きで自治が認められることとなった。

一方、ベルリン会議で成立が正式に承認されたブルガリア公国はロシア皇妃の甥、アレクサンダル公を戴いていたが、その領域は、ロシアの勢力伸長への警戒感から、小さくされていた。ロシアの同意を得ず、東ルメリアを併合すると、勢力均衡を脅かすとしてセルビアと戦争状態に入ったが、これには優勢に戦いを進め、ブカレスト講和条約で国際的に承認された。しかし、ロ

シアの圧力でアレクサンダル公は退位に追い込まれ、反ロシアのスタンボロフが公となったが、その後任となったフェルディナント公はロシアとの関係改善を進め、その同意も得た上で、オスマン帝国は、フェルディナント公の東ルメリア総督の兼任も認めた。1908 年に青年トルコ革命が起こると、フェルディナント公はブルガリアを独立させた。

アルバニアでもナショナリズムが高まり、現実的な自治をオスマン帝国に求めたが果たされなかった。青年トルコ革命においては、アルバニア人の自治が認められるのではないかと期待したが、これも果たされなかった。1910 年には反オスマン蜂起が起こり、以後は独立を求める運動が行われていく。

多くのバルカン諸国は独立したが、同じ民族を取り込もうとし、対立も生んでいく。オーストリアとロシアがそれぞれパン・ゲルマン主義、パン・スラブ主義を唱えてバルカン地方に多大なる関心を寄せ、まさに「ヨーロッパの火薬庫」の状況を呈すようになる。

セルビアでは、ミロシュが反対勢力の拡大で退位に追い込まれた後、内務大臣ガラシャニンが「ナチェルターニエ (指針)」を発表し、 中世のドゥシャン王の治世を想起しつつ、セルビアを中心とした強力な南スラブ国家の建設を目指し、大国の後ろ盾無しにバルカン同盟を結成することを目指したが、1869 年のミハイロ公暗殺でガラシャニンも職を解任され、すべては水泡に帰した。しかし、ガラシャニンの考えは、大セルビア主義の基礎となった。

ギリシャではオトンの強権政治に対する反発が起こり、1943 年にはクーデターが起こって、憲法を制定しと国民議会を開設するほかなくなった。その後、ギリシャは大ギリシャ主義に基づき、ギリシャ人居住地域の統合を目指すこととなった。ロシアとの関係を改善し、ギリシャ正教を世界総主教座から独立させた。1862 年には、再びクーデターが起こり、オトンは追放され、代わりにデンマーク国王の第二子ウィルヘルムがゲオルギオス一世として即位した。領土回復については、思うようには進まず、テッサリアやイピロス南部・クレタ島を回復することは出来たが、未だオスマン帝国の支配下にあるマケドニア地方が残っていた。

未だオスマン帝国の支配下にあったマケドニアは、バルカン諸国の領土的関心の的であった。戦略上の要衝でもあるうえ、様々な民族が混在しており、どの国も領有権を主張した。

1908 年ごろからロシアの後ろ盾のもと、バルカン諸国はバルカン連盟を築き、1912 年、オスマン帝国との間に第一次バルカン戦争が行われた。イタリアとも戦争中であったオスマン帝国が集めた兵力は、バルカン連盟 70 万に対し、32 万程度で、翌年には敗色濃厚となり、列強の介入でロンドン条約が結ばれ、休戦が成立、オスマン帝国はトラキアを除くバルカン半島から撤退した。また、戦争中にアルバニアがケマルの指導で独立を宣言し、ロンドン条約で独立が認められた。しかし、アルバニア人の多い、コソヴォ・サンジャク地方はセルビアとモンテネグロの占領下に置かれた。

オスマン帝国の撤退で、覇権の真空地帯となったマケドニアに、各国の領土的要求が吸い込まれていった。1913 年 6 月には、ブルガリアがセルビア及びギリシャに攻撃を仕掛けることにより、第二次バルカン戦争が起こった。セルビアとギリシャ側には、モンテネグロ・ルーマニア・オスマン帝国が付き、すぐにブルガリアの敗戦は決した。同年八月、ブカレスト条約が結ばれ、ブルガリアは領土を各国に割譲した。11 月には、オスマン帝国とブルガリアの間で、初の住民交換が行われた。

1914 年 6 月 28 日、オーストリアハプスブルク帝国の支配下にあるボスニアの州都サラエヴォで、皇太子夫妻が暗殺されるという、サラエヴォ事件が発生した。事件の実行犯プリンツィプは青年ボスニアの運動家であった。オーストリアは青年ボスニアの背後で、セルビアの秘密組織民族防衛段が糸を引いているとして、オーストリア官憲の捜査参加など 10 項目からなる最後通牒を突きつけた。セルビアはこれを受け入れず、戦争が勃発、ロシアを含む三国協商がセルビア側に、ドイツを含む同盟国がオーストリア側に立って参戦したため、瞬く間に戦火は世界へと広がっていった。これがいわゆる第一次世界大戦だが、バルカン諸国は、これを第三次バルカン戦争とみなして参戦した。

戦争の結果、オスマン帝国とブルガリアが敗戦国となり、それぞれ領土を減らし、賠償金が課された。

オスマン帝国は、連合国に占領されていった。そんななかムスタファ・ケマルが祖国解放を唱え、国民議会を召集して、イスタンブール政府と戦った。アンカラに政府を打ち立てたケマルは各地で勝利し、大ギリシャ主義に駆られたギリシャ軍をも破り、その管理下にあったイズミルも奪回した。後に、スルタン・カリフを廃止、23 年にはローザンヌ条約によって不平等条約を撤廃して、連合国を撤退させ、共和国を正式に樹立した。また、このローザンヌ条約のとき、大規模な住民交換が行われ、千年以上にわたり小アジアで生活していた正教徒がギリシャの不毛の地に送られた。同様に、クレタ島のムスリムなどもトルコに送られた。これらの住民交換は後の「民族浄化」の先例とみなされている。

セルビア・モンテネグロと、ハプスブルク帝国内のクロアチア・ダツマツィアスロヴェニア・ボスニアヘルツェゴヴィナは、セルビア国王の下、「セルビア人・クロアチア人・スロヴェニア人王国」を建国した。後に、これはユーゴスラヴィア王国と改称されることになる。

参考文献: 図説バルカンの歴史 柴宣弘 河出書房新社 詳説世界史研究 山川出版社

under construction!

参考文献

[1] 線形代数入門 齋藤正彦著 基礎数学 1 東京大学出版会

[2] 固有値問題 30 講 志賀浩二著 朝倉書店

[3] 新版量子論の基礎 その本質のやさしい理解のために
清水明著 新物理学ライブラリ別巻 2 サイエンス社

[4] 数学の基礎 集合・数・位相 齋藤正彦著 基礎数学 14 東京大学出版会

索 引