同値関係と分類

酒匂貴市

平成 18 年 12 月 25 日

目 次

1　分類を行うのに必要な二項関係の条件

1.1　導入

集合 S の要素を、**S 上で定義された適当な二項関係 $\sim$ を用い、似たものをひとまとめにして分類することを考える**。より具体的に言うと、適当な代表元 a をとり、それと適当な二項関係 $\sim$ で結ばれる元をまとめた部分集合を作ることで、集合 S の元を分類しようというのである。記号で表すと、それぞれの代表元 a に関する部分集合は $\{\mathbf{x}(\in \mathbf{S})|\mathbf{x} \sim \mathbf{a}\}$ と表される。これを以下 $[a]$ と表すことにする。

1.2　課せられる条件 1

部分集合によって分類を行う時、部分集合に条件はないのだろうか。それは当然どんな分類を行うかによってくるのだが、まず、”代表元と似たものをひとまとめにする”ことを考えているのだから、**「代表元そのものは必ずそれから作られる部分集合に含まれる」**という条件は課したい。まだ二項関係 $\sim$ に関しては何の情報も与えられていないので、そういうところから考えていく必要がある。

いまの「代表元そのものは必ずそれから作られる部分集合に含まれる」という条件を数学的に表すと、

$$a \in [a]$$

となる。これは $[a]$ の定義より

$$a \sim a$$

と同値である。これがまず分類を行うための二項関係 $\sim$ に課せられる条件である。この性質は「**反射律**」と数学的には言われている。

1.3　課せられる条件 2

また次は、**「同じ部分集合に分類される元は、どれを代表元にとっても良い。」**という条件を課したいと思う。

なぜこのような条件を課すのかということは、具体例を考えるとわかりやすい。例えば、「人」を「年齢」によって分類することを考える。この場合、二項関係 $\sim$ は年齢が等しいことを示すと考えればよい。そして、今考えている方針に従えば、誰か代表を選び出して、その人と同じ年齢の人をまとめて部分集合を作っていくわけである。この時、例えば 18 歳の人を代表にしてつくった部分集合を作ったとしたら、その集合に属す人は皆 18 歳なのであるか

ら、その中のだれが代表になっても同じ「18 歳の人」の集合が作れるはずである。「同じ部分集合に分類される元は、どれを代表元にとっても良い。」という条件は、このような考え方に基づくものである。

この条件を数学的に表すと、

$$a' \in [a] \text{ ならば } [a'] = [a]$$

と表せる。$a' \in [a]$ は $a' \sim a$ と同値なので、

$$a' \sim a \text{ ならば } [a'] = [a]$$

と表しても良い。この条件が満たされるために必要な、二項関係 $\sim$ に課せられるべき条件を考察する。

まず、「$[a'] = [a]$」は「$[a'] \subset [a]$ かつ $[a'] \supset [a]$」と同値である。必要性を考えるために、

$$a' \sim a \text{ ならば } [a'] \subset [a] \tag{1}$$

となる条件から論じたい。「$[a'] \subset [a]$」という条件をさらに言い換えると、「任意の x について、$x \in [a']$ なら $x \in [a]$ となる。」という命題が成り立つことと同値である。$[a'], [a]$ の定義により、これは「任意の x について、$x \sim a'$なら $x \sim a$」とも同値なので、条件 (1) をこれに基づいて言い換えると、

$$a' \sim a \text{ が成り立っているとき、任意の } x \text{ について、} x \sim a' \text{なら } x \sim a$$

ということになる。これを二項関係に課すべき条件として見直すと、

$$\text{「}x \sim a' \text{かつ } a' \sim a\text{」なら「}x \sim a\text{」}$$

ということになる。この性質は「**推移律**」と数学的には言われている。推移律を導入することで、条件 (1) は満たされた。

1.4 課せられる条件 3

今度は、

$$a' \sim a \text{ ならば } [a'] \supset [a] \tag{2}$$

の方である。これを上の場合と同様にして二項関係に課すべき条件として言い換えると、

$$\text{「}x \sim a \text{ かつ } a' \sim a\text{」なら「}x \sim a'\text{」} \tag{3}$$

ということになる。先ほどの推移律をこれに用いようとすれば、「$x \sim a$ かつ $a \sim a'$」とならなければならず、「$a' \sim a$」と「$a \sim a'$」の部分が異なるの

で、これは推移律では成り立つことを示せない。そこでまた新たな条件が必要になってくるのである。この条件 (3) をそのまま使う手もあるのだが、推移律との差は「a' $\sim a$」と「a $\sim a'$」の部分だけなので、

$$「a' \sim a」ならば「a \sim a'」$$

という条件を導入することの正当性を考えたい。

実のところ、いまは「似たものを二項関係 $\sim$ によってひとつにまとめる」ことを考えているということを踏まえると、この条件、

$$「a' \sim a」ならば「a \sim a'」$$

は、かなり正当性がある。なぜなら、大小関係と異なり、「似ていること・同じであること」を言うのに、順番は関係ないからである。このことを考えると、この性質は、むしろ積極的に導入すべきでもある。よって、条件 (3) を成立させるために、

$$「a' \sim a」ならば「a \sim a'」$$

という性質も課すことにする。これは「**対称律**」と数学的には言われている。推移律と対称律を組み合わせることにより、条件 (3) が満たされ、条件 (1)(2) が両方とも満たされることになって、$a' \sim a$ ならば $[a'] = [a]$も成立することとなった。

2 まとめ

2.1 定義

前章で見たことの示唆により、以下のような定義が置かれる。

定義 2.1 集合 S 上の二項関係 *(ここでは* $\sim$ *で表すことにする)* が**同値関係**であるとは、次の *3* 条件を満たすときにいう。

1. *(*反射律*)* 任意の $a \in S$ に対して $a \sim a$
2. *(*対称律*)* 任意の $a, b \in S$ に対して $a \sim b$ なら $b \sim a$
3. *(*推移律*)* 任意の $a, b, c \in S$ に対して $a \sim b, b \sim c$ なら $a \sim c$

定義 2.2 集合 S 上の同値関係 $\sim$ について、$a(\in S)$ と同値な元の全体 $\{x \in S | x \sim a\}$ を a の**同値類**といい、$[a]$ と表す。また、このとき、a を同値類 $[a]$ の代表元という。

定義 2.3 同値類の全体からなる集合を**商集合**といい、$S/\sim$ と表す。($S/\sim = \{[a] | a \in S\}$)

2.2　定理

　このように定義した時、「同じ同値類に属す元は、どれを代表元にとっても良い」ということを表す次の定理が得られる。

定理 2.1 $a \sim b$ なら $[a] = [b]$

(proof)
　任意の $x \in [a]$ を取ると、$x \sim a$ である。このとき $x \sim a, a \sim b$ なので、推移律より $x \sim b$ である。従って、任意の x について $x \in [a]$ ならば $x \in [b]$ が成り立つということで、$[a] \subset [b]$ である。

　任意の $x \in [b]$ を取ると、$x \sim b$ である。対称律より $b \sim a$ が成り立つので、このとき、$x \sim b, b \sim a$ となり、推移律より $x \sim a$ である。従って、$[b] \subset [a]$ である。

　以上より、$[a] \subset [b]$ かつ $[b] \subset [a]$ なので、$[a] = [b]$ である。 $\boxed{\text{証明終}}$

　さらに、この定理からただちに以下の定理も得られる。

定理 2.2 異なる同値類は共通部分を持たない。

(proof)
　対偶「二つの同値類が、共通部分を持てば、その同値類は等しい。」を示す。

　$c \in [a]$ かつ $c \in [b]$ となる c があったとする。$c \sim a$,$c \sim b$ なので、定理 2.1 より $[a] = [c] = [b]$ である。よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

　つまり、同値類による分類は、要素が、重複して異なる集合に含まれることを許さないのである。

参考文献

[1] 数学の基礎 集合・数・位相 齋藤正彦著 基礎数学 14 東京大学出版会